

БИБЛИОТЕЧКА  
ВСЕРОССИЙСКОЙ  
ЗАОЧНОЙ  
МНОГОПРЕДМЕТНОЙ  
ШКОЛЫ

Н. Б. Васильев  
В. Л. Гутенмахер

# Прямые и кривые

Издание шестое,  
стереотипное

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
Москва 2006

УДК 514.11  
В19  
ББК 22.151.0

**Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.**  
В19      Прямые и кривые. — 6-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2006. — 128 с.: ил.

Книжка состоит примерно из двухсот задач, многие из них даны с решениями или комментариями. Эти задачи очень разнообразны — от традиционных задач, в которых нужно найти и как-то использовать то или иное множество точек, до небольших исследований, подводящих к важным математическим понятиям и теориям. Помимо обычных геометрических теорем о прямых, окружностях и треугольниках, в книге используются метод координат, векторы и геометрические преобразования, и особенно часто — язык движений. Некоторые логические тонкости, зачастую возникающие в решениях, оставлены читателю для размышления.

Для школьников, учителей математики, руководителей кружков.

5-е изд. — 2004 год.

ББК 22.151.0

ISBN 5-94057-151-4

© МЦНМО, 2006

## Предисловие ко второму изданию

Главные действующие лица этой книжки — различные геометрические фигуры, или, как они здесь чаще называются, «множества точек». Вначале появляются самые простые фигуры в различных сочетаниях. Они двигаются, обнаруживают новые свойства, пересекаются, объединяются, образуют целые семейства и меняют своё обличье — иногда до неузнаваемости; впрочем, интересно увидеть старых знакомых в сложной обстановке, в окружении новых фигур, появляющихся в финале.

Книжка состоит примерно из двухсот задач, многие из них даны с решениями или комментариями. Эти задачи очень разнообразны — от традиционных задач, в которых нужно найти и как-то использовать то или иное множество точек, до небольших исследований, подводящих к важным математическим понятиям и теориям (таковы задачи «про сыр», «про катер» и «про автобус»). Помимо обычных геометрических теорем о прямых, окружностях и треугольниках, в книге используются метод координат, векторы и геометрические преобразования, и особенно часто — язык движений. Некоторые логические тонкости, возникающие в решениях, оставлены читателю для размышления. Знак (?) заменяет слова «упражнение», «проверьте», «очевидно ли вам это утверждение?», «подумайте, почему» и т. п. — в зависимости от места, где он стоит. Знаком  $\square$  отмечается начало и конец решения, а  $\downarrow$  указывает, что решение или ответ к задаче есть в конце книги.

Задачи, открывающие каждый параграф, обычно несложны или подробно разобраны в тексте. Остальные задачи вовсе не обязательно решать все подряд — можно, читая книжку, выбирать по своему усмотрению те, которые кажутся более заманчивыми. Многое из того, о чём говорится в задачах, полезно проверить на опыте: сделать крупный чертёж, лучше — в нескольких вариантах (с различным расположением фигур). Такой экспериментальный подход не только помогает угадать ответ, сформулировать гипотезу, но часто и подсказывает путь к математическому доказательству. Рисую картинки на полях, авторы убедились, что почти за каждой задачей скрыта вспомогательная задача: постро-

ить несколько точек или линий, о которых говорится в условии. Эта предварительная задача часто оказывается более доступной, но не менее интересной.

Авторы глубоко признательны И. М. Гельфанду, советы которого помогли в работе над книгой, И. М. Яглому, В. Г. Болтянскому и Ж. М. Работу, прочитавшим рукопись, за существенные замечания. Со времени первого издания (1970 год) эта книга постоянно использовалась в работе Заочной математической школы. Серьёзная переработка при подготовке второго издания учитывала опыт, которым поделились с нами преподаватели этой школы, наши друзья и коллеги. Всем им, а также редактору книги А. Ф. Лапко мы приносим искреннюю благодарность.

Москва, 1978 год

*Н. Васильев,  
В. Гутенмахер*

### **Несколько слов о Н. Б. Васильеве**

28 мая 1998 года в результате тяжёлой болезни в возрасте 57 лет ушёл из жизни один из авторов этой книги, превосходный человек и талантливый математик, интеллектуал высочайшего уровня, энциклопедически образованный учёный и просветитель Николай Борисович Васильев.

С 1957 года, когда он, сделав выбор между математикой и музыкой (одновременно с окончанием школы он блестяще окончил музыкальное училище при Московской консерватории), поступил на механико-математический факультет МГУ, и до последних дней жизнь Николая Борисовича была связана с Московским университетом.

Окончив в 1962 году МГУ и сразу же поступив в аспирантуру, после её окончания Николай Борисович стал успешно работать в межфакультетской лаборатории математических методов в биологии (ныне одноимённом отделе университетского института физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского), где заведующий лабораторией — один из крупнейших математиков нашего времени академик И. М. Гельфанд — собрал очень сильный коллектив математиков и биологов. Н. Б. Васильев быстро вошёл в курс дела и за последующие годы опубликовал целый ряд серьёзных работ.

С первого курса университета Николай Борисович параллельно с блестящей учёбой начал работать со школьниками. Делая всё, что

положено члену оргкомитета Московской олимпиады, — придумывая новые и обсуждая предложенные другими задачи, участвуя в составлении вариантов, проверяя работы, — он много работал и над собственным образованием в области элементарной математики.

Страна в это время переживала период бурного подъёма интереса к математике и физике, на мехмате работой со школьниками занимались очень сильные математики — студенты, аспиранты, преподаватели, и Н. Б. Васильев стал одним из лидеров не только олимпиадного движения, но и всей работы со школьниками: был одним из руководителей знаменитого математического кружка при МГУ; одним из организаторов и пропагандистов Всероссийской, а затем и Всесоюзной олимпиады (в течение более чем десяти лет Николай Борисович был членом Оргкомитета, а также заместителем Председателя Методической комиссии по математике Всесоюзной олимпиады академика А. Н. Колмогорова); много лет принимал вступительные экзамены в физико-математический интернат при МГУ (знаменитый «Колмогоровский интернат»); организовывал вместе с академиками И. М. Гельфандом и И. Г. Петровским первую в стране ВЗМШ — заочную математическую школу при МГУ (ныне Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ)») и в дальнейшем был членом её Научного совета; был среди инициаторов создания и бессменным членом редколлегии Всероссийского журнала для школьников «Квант» (заведовал, пожалуй, самым трудным его разделом — «Задачником Кванта»); и т. д.

Можно сказать, что ни одно серьёзное дело, связанное со средним математическим образованием в стране в 60–90-е годы, не обошлось без активного, квалифицированного и плодотворного участия Н. Б. Васильева.

Особо следует сказать о его деятельности, связанной с изданием популярной литературы для школьников.

Будучи разносторонне образованным, высоко культурным человеком, он умел очень точно, наглядно, образно и, что обычно встречается гораздо реже, красиво изложить самые запутанные и трудные вопросы; в полной мере он обладал редким даром задачного композитора.

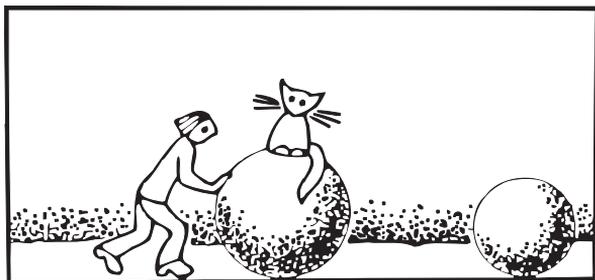
Его эрудиция позволяла ему находить даже очень далёкие связи между совсем, казалось бы, непохожими задачами. Он одинаково свободно владел и аналитическими, и геометрическими, образными методами и приёмами. Являясь автором большого количества книг и статей, он всегда добивался простоты изложения, многоплановости материала, глубокой содержательности. Это не была погоня за нестандартностью и псевдооригинальностью, он очень не любил громоздкие доказательства, заумные и занудные пассажи, всё неэстетичное; сам же он часто находил совершенно необычные штрихи, детали, умел ярко показать единство и красоту любимой им математики. Это полностью относится и к его лекциям и другим выступлениям, служившим образцом продуктивности, логичности, прозрачности, внутренней красоты.

Книга «Прямые и кривые» возникла из задания, написанного Н. Б. Васильевым и В. Л. Гутенмахером для учащихся ВЗМШ (оба автора фактически создали математическое отделение ВЗМШ и руководили им начиная с его основания в 1964 году). Она была издана в серии «Библиотечка физико-математической школы» (возглавляемой И. М. Гельфандом), затем сильно переработана для второго издания в этой же серии. Это была кропотливая, самоабвенная работа двух друзей, мастеров своего дела. Выбрав, пожалуй, самый трудный для написания жанр — книгу-задачник, создатели «Прямых и кривых» успешно справились со своей задачей, о чём свидетельствуют многочисленные отзывы как людей, просто знакомившихся с книгой, так и нескольких поколений учителей и школьников, учившихся по ней.

Автор этих строк был свидетелем всего творческого процесса создания книги и надеется, что читатель получит такое же удовольствие от знакомства и работы с ней, какое получил он сам.

Москва, 2000 год

*Ж. Раббот*



## Введение

### Первые задачи.

**0.1.** Лестница, стоявшая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котёнок, сидящий на середине лестницы?

Пусть котёнок флегматичный и сидит смирно. Тогда за этой условной формулировкой видна такая математическая задача.

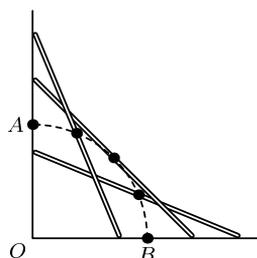
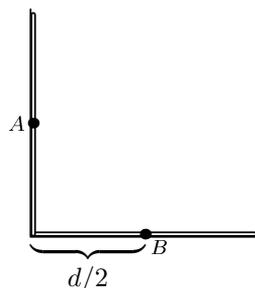
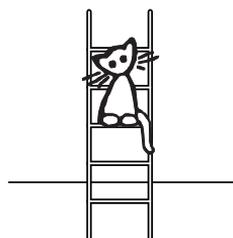
Дан прямой угол. Найти множество середин всевозможных отрезков данной длины  $d$ , концы которых лежат на сторонах данного угла.

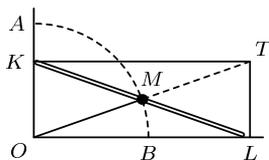
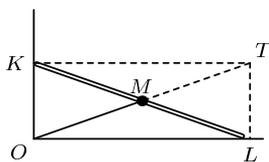
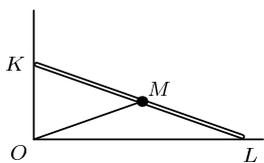
Попробуем догадаться, что это за множество. Разумеется, когда отрезок поворачивается, скользя концами по сторонам угла, его середина описывает некоторую линию (это подсказывает и первая наглядная формулировка задачи). Прежде всего выясним, где находятся концы этой линии. Они соответствуют крайним положениям отрезка, когда он вертикален или горизонтален. Значит, концы линии  $A$  и  $B$  находятся на сторонах угла на расстояниях  $d/2$  от его вершины.

Постройте несколько промежуточных точек этой линии. Если вы сделаете это достаточно аккуратно, то увидите, что все они находятся на одинаковом расстоянии от вершины  $O$  данного угла.

Возникает предположение: искомая линия — дуга окружности радиуса  $d/2$  с центром  $O$ . Теперь нужно это доказать.

□ Докажем сначала, что середина  $M$  данного отрезка  $KL$  ( $|KL|=d$ ) всегда находится на



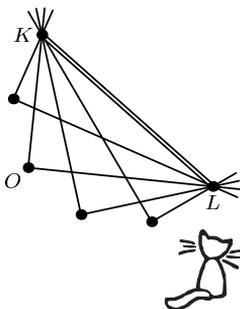


расстоянии  $d/2$  от точки  $O$ . Это следует из того факта, что длина медианы  $OM$  прямоугольного треугольника  $KOL$  равна половине длины гипотенузы  $KL$ . (В справедливости этого легко убедиться, построив треугольник  $KOL$  до прямоугольника  $KOLT$  и вспомнив, что диагонали прямоугольника  $KL$  и  $OT$  равны по длине и точкой пересечения  $M$  делятся пополам.)

Таким образом, мы доказали, что середина отрезка  $KL$  всегда лежит на дуге  $\smile AB$  окружности с центром  $O$ . Эта дуга и есть искомое множество точек.

Строго говоря, мы должны ещё доказать, что любая точка  $M$  дуги  $\smile AB$  принадлежит искомому множеству. Это нетрудно сделать. В самом деле, через любую точку  $M$  нашей дуги мы можем провести луч  $OM$ , отложить на нём отрезок  $|MT| = |OM|$ , опустить из  $T$  перпендикуляры  $TL$  и  $TK$  на стороны угла — и нужный отрезок  $KL$  с серединой в точке  $M$  готов.  $\square$

Вторая половина доказательства могла бы показаться излишней: ведь ясно, что середина отрезка  $KL$  описывает «непрерывную линию» с концами  $A$  и  $B$ , значит, точка  $M$  проходит в эту дугу  $AB$ , а не какую-то её часть. Это рассуждение совершенно убедительно, но ему не так просто придать математическую строгость.



Посмотрим теперь на движение лестницы из задачи **0.1** с другой стороны. Пусть отрезок  $KL$  («лестница») закреплён, а прямые  $KO$  и  $LO$  («стена» и «пол») вращаются соответственно вокруг точек  $K$  и  $L$  так, что угол между ними остаётся прямым. Тот факт, что расстояние от середины отрезка до вершины  $O$  прямого угла всё время одно и то же, превращается в известную теорему: *если на плоскости заданы две точки  $K$  и  $L$ , то множество точек  $O$ , для которых  $\angle KOL = 90^\circ$  — окружность с диаметром  $KL$* . Эта теорема, а также её обобщение, которое мы дадим в пункте **Д § 2**, не раз пригодятся при решении задач.

Вернёмся к условию задачи **0.1** и поставим более общий вопрос.

**0.2.** По какой линии будет двигаться котёнок, если он сидит не на середине лестницы?

На рисунке построено несколько точек одной из таких линий. Видно, что это — не прямая и не окружность, т. е. новая для нас кривая. Выяснить, что это за кривая, нам поможет метод координат.

□ Введём систему координат, приняв стороны угла за оси  $Ox$  и  $Oy$ . Пусть котёнок сидит в точке  $M(x; y)$  на расстоянии  $a$  от конца  $K$  лестницы и на расстоянии  $b$  от  $L$  ( $a + b = d$ ). Найдём уравнение, связывающее координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$ .

Если отрезок  $KL$  наклонён под углом  $\varphi$  к оси  $Ox$ , то  $y = b \sin \varphi$ ,  $x = a \cos \varphi$ , поэтому при любом  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ )

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, как мы узнаем в § 6 — *эллипс*. Таким образом, котёнок будет двигаться по эллипсу. □

Заметим, что при  $a = b = d/2$  — если котёнок сидит, как прежде, на середине лестницы — уравнение (1) превращается в уравнение окружности  $x^2 + y^2 = (d/2)^2$ . Тем самым мы получаем ещё одно, аналитическое, решение задачи **0.1**.

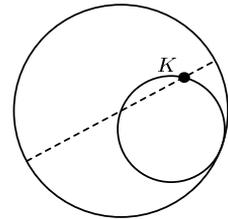
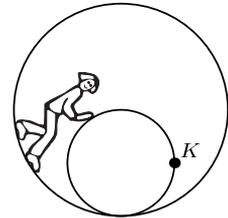
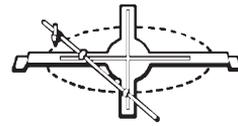
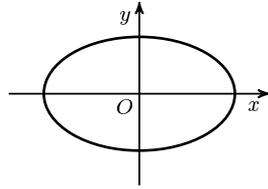
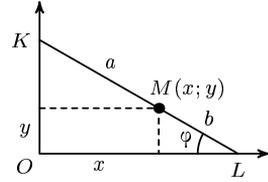
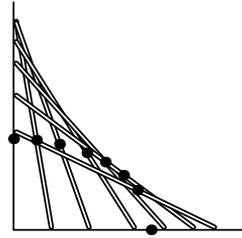
Результат задачи **0.2** объясняет устройство механизма, вычерчивающего эллипсы. Этот механизм, изображённый на рисунке, называется *эллипсографом* Леонардо да Винчи.

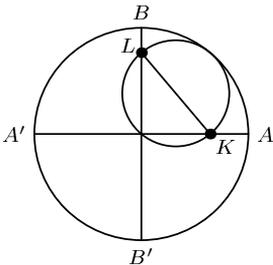
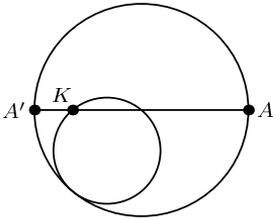
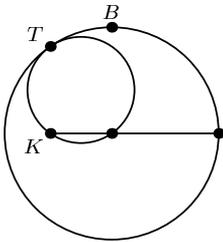
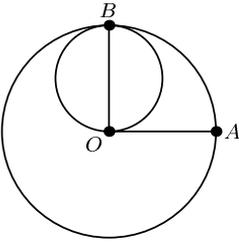
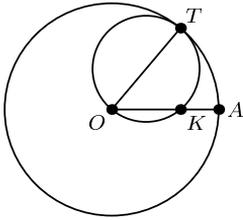
### Теорема Коперника.

**0.3.** По неподвижной окружности, касаясь её изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую линию описывает точка  $K$  подвижной окружности?

Ответ в этой задаче до удивления простой: точка  $K$  движется по прямой — точнее, по диаметру неподвижной окружности. Этот результат и называется *теоремой Коперника*.

Попробуйте убедиться на опыте в справедливости этой теоремы. (При этом важно, чтобы внутренний круг катился без скольжения, т. е. чтобы длины прокатившихся друг по другу дуг были равны.) Её нетрудно и доказать — нужно лишь вспомнить теорему о величине вписанного угла.





□ Пусть точка подвижной окружности, занимавшая в начальный момент положение  $A$  на неподвижной окружности, попала в положение  $K$ , а  $T$  — точка касания окружностей в этот момент времени. Поскольку длины дуг  $\frown KT$  и  $\frown AT$  равны, а радиус подвижной окружности вдвое меньше, то градусная величина дуги  $\frown KT$  вдвое больше, чем дуги  $\frown AT$ . Таким образом, если  $O$  — центр неподвижной окружности, то по теореме о вписанном угле (см. § 1 стр. 16)  $\angle AOT = \angle KOT$ . Значит, точка  $K$  лежит на радиусе  $AO$ .

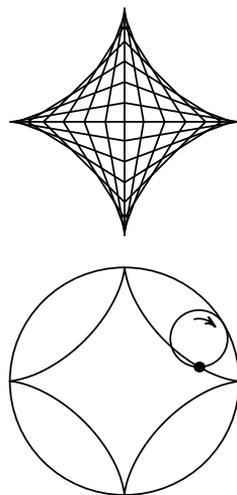
Это рассуждение годится вплоть до того момента, когда подвижный круг прокатится по четверти большой окружности (точка касания тогда попадёт в точку  $B$  большой окружности, для которой  $\angle BOA = 90^\circ$ , а  $K$  совпадёт с  $O$ ). Дальше движение будет происходить точно так же — вся картина просто отразится симметрично от прямой  $BO$  — а затем, после того как точка  $K$  достигнет противоположного конца  $A'$  диаметра  $AA'$ , круг будет катиться по нижней половине неподвижной окружности и в это время точка  $K$  вернётся в  $A$ . □

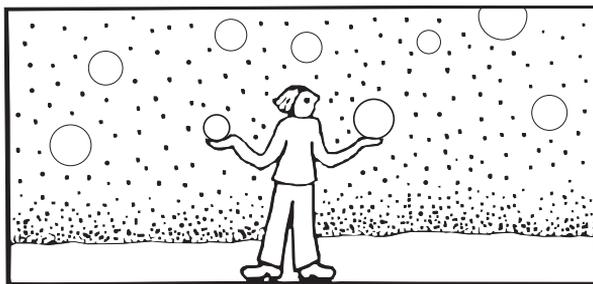
Сравним результаты задач **0.1** и **0.3**. Их привлекательность заключена, по-видимому, в следующем обстоятельстве. В обеих задачах речь идёт о довольно сложном движении фигуры (в первой — о движении отрезка, во второй — окружности), но траектории некоторых точек получаются неожиданно простыми. Оказывается, эти две задачи связаны не только внешним сходством, но и сами движения, рассмотренные в них, совпадают!

Действительно, пусть по окружности радиуса  $d$  изнутри катится окружность радиуса  $d/2$ , и пусть  $KL$  — диаметр этой окружности, жёстко связанный с ней. Согласно теореме Коперника точки  $K$  и  $L$  двигаются по неподвижным прямым (диаметрам большой окружности —  $AA'$  и  $BB'$  соответственно). Итак, диаметр  $KL$  скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым, т. е. двигается так, как отрезок в задаче **0.1**.

Ещё один интересный вопрос, связанный с движением отрезка  $KL$ : какое множество точек заметает этот отрезок, т. е. каково объединение всевозможных положений отрезка  $KL$  при его движении? Кривая, ограничивающая это множество, называется *астроидой*. Оказывается, её можно получить так: заставить круг диаметра  $d/2$  катиться изнутри по окружности диаметра  $2d$  и нарисовать траекторию какой-то определённой точки окружности катящегося круга — эта траектория и будет астроидой. Об этой кривой и её близких родственниках мы поговорим в последнем § 7 нашей книжки, где читатель более подробно познакомится с той взаимосвязью вопросов, которую мы затронули.

Однако прежде, чем заниматься такими изысканными вопросами и кривыми, мы обстоятельно остановимся на задачах, связанных с прямыми и окружностями — другие линии на протяжении первых пяти параграфов не появятся.





## § 1. Множество точек

В этом параграфе мы обсудим и проиллюстрируем рядом примеров основные постановки задач, составляющих книгу, а также арсенал понятий и средств, используемых для их решения. Заканчивается этот параграф множеством разных геометрических задач.

Обсудим сначала термин, который чаще всего встречается в книге и вынесен в заголовок параграфа.

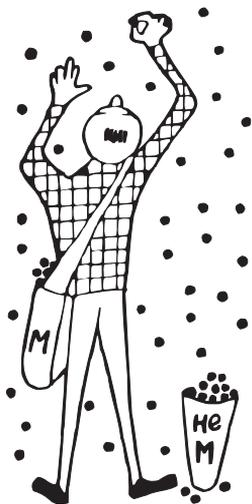
«*Множество точек*» — очень общее понятие. Это может быть любая фигура: одна или несколько точек, линия или область на плоскости.

Во многих задачах нашей книжки требуется *найти множество точек*, удовлетворяющих некоторому условию. Ответами в таких задачах являются, как правило, фигуры, известные из школьного курса геометрии (прямые, окружности, иногда куски, на которые эти линии разбивают плоскость, и т. п.). Главное — догадаться, какая это фигура. Так, в задаче **0.1** про котёнка мы догадались, что ответ — окружность, а в задаче **0.3** ответом оказалась прямая.

В решениях некоторых задач приходится провести целое исследование. Ведь нужно убедиться в том, что:

- а) *все точки, удовлетворяющие данному условию, принадлежат указанной фигуре;*
- б) *все точки фигуры удовлетворяют данному условию.*

Иногда очевидны оба эти утверждения — и прямое и обратное, иногда только одно из них;



а случается, что даже сообразить, каков ответ, трудно.

Разберём несколько характерных задач.

**1.1.** Точка  $O$  лежит на отрезке  $AC$ . Найти множество точек  $M$ , для которых  $\angle MOC = 2\angle MAC$ .

□ *Ответ.* Объединение окружности с центром  $O$  радиуса  $|AO|$  (без точки  $A$ ) и луча  $OC$  (без точки  $O$ ).

Убедимся в этом. Пусть точка  $M$  искомого множества не принадлежит прямой  $AO$ . Докажем, что расстояние  $|MO|$  от неё до точки  $O$  равно  $|AO|$ . Построим треугольник  $OAM$ . По теореме о внешнем угле треугольника величина угла  $MOC$  равна сумме величин двух внутренних углов  $A$  и  $M$ , не смежных с ним, т. е.

$$\angle OAM + \angle AMO = \angle MOC = 2\angle MAO.$$

Из условия задачи сразу получаем  $\angle OAM = \angle AMO$ , следовательно, треугольник  $AMO$  равнобедренный, т. е.  $|OM| = |AO|$ .

Докажем, что верно и обратное: всякая точка  $M$  указанной в ответе окружности удовлетворяет условию.

В самом деле, треугольник  $AMO$  равнобедренный, величины его углов  $A$  и  $M$  равны и, по той же теореме о внешнем угле,  $\angle MOC = 2\angle MAC$ .

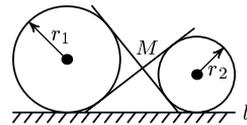
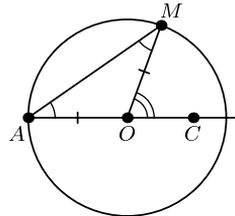
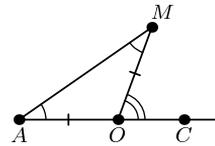
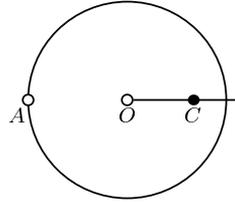
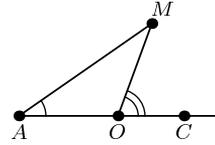
Пусть теперь точка  $M$  принадлежит лучу  $OC$ ,  $M \neq O$ . Тогда  $\angle MOC = 2\angle MAC = 0^\circ$ , и условие выполнено.

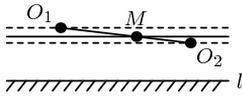
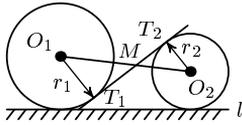
Остальные точки прямой  $AO$  не принадлежат искомому множеству: для них один из углов  $MOC$  и  $MAC$  развёрнутый, а другой — нулевой (про точку  $O$  ничего сказать нельзя). □

**1.2.** Два колеса радиусов  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ) катаются по прямой  $l$ . Найти множество точек пересечения  $M$  их общих внутренних касательных (см. рисунок).

□ *Ответ.* Прямая, параллельная  $l$ .

Заметим, что точка  $M$  лежит на оси симметрии этих двух окружностей — прямой  $O_1O_2$ , где  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей. Поэтому можно искать множество точек пересечения прямой  $O_1O_2$  и одной из касательных  $T_1T_2$ .

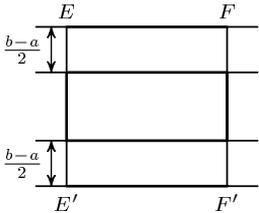
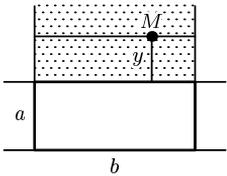
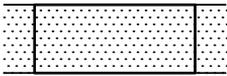
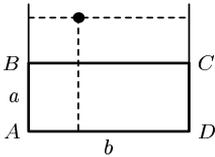




Рассмотрим произвольное расположение двух окружностей и проведём в точки касания их радиусы  $O_1T_1$  и  $O_2T_2$ . Мы видим, что точка  $M$  делит отрезок  $O_1O_2$  в отношении  $r_1/r_2$  (прямоугольные треугольники  $MO_1T_1$  и  $MO_2T_2$  подобны). Ясно, что множество центров  $O_1$  и множество центров  $O_2$  — прямые, параллельные прямой  $l$ . Множество точек  $M$ , которые делят отрезки  $O_1O_2$  с концами на этих прямых в одном и том же отношении  $r_1/r_2$ , также представляет собой прямую, параллельную  $l$ .

Таким образом, множество точек пересечения касательных — прямая, параллельная прямой  $l$  и находящаяся от этой прямой на расстоянии  $2r_1r_2/(r_1 + r_2)$  (?). □

Для решения следующей задачи нужно провести более кропотливое исследование. Нам придётся разбить плоскость на несколько кусков и в каждом проводить отдельное рассуждение.



**1.3.** Дан прямоугольник  $ABCD$ . Найти все такие точки плоскости, что сумма расстояний от каждой из них до двух прямых  $AB$  и  $CD$  равна сумме расстояний до прямых  $BC$  и  $AD$ .

□ Обозначим длины сторон прямоугольника через  $a$  и  $b$ . Рассмотрим сначала прямоугольник, отличный от квадрата: пусть  $a < b$ .

Точки, лежащие внутри прямоугольника, а также между продолжениями больших его сторон, не удовлетворяют требованию задачи, поскольку одна сумма расстояний равна  $a$ , а другая не меньше  $b$ .

Пусть теперь точка  $M$  находится между продолжениями меньших сторон прямоугольника. Обозначим через  $y$  расстояние от неё до ближайшей большей стороны прямоугольника; тогда расстояние до противоположной стороны равно  $y + a$ . Для того чтобы точка удовлетворяла требованию задачи, нужно, чтобы выполнялось равенство  $y + (y + a) = b$ , откуда  $y = (b - a)/2$ . Таким образом, среди точек, лежащих между продолжениями меньших сторон прямоугольника, условию удовлетворяют те и только те точки, которые находятся на расстоянии  $(b - a)/2$  до ближайшей большей стороны прямоугольника. Множество точек в этой

области — это объединение двух отрезков,  $EF$  и  $E'F'$ .

Наконец, рассмотрим любую точку  $M$ , лежащую в угле, образованном продолжениями двух соседних сторон  $BC$  и  $DC$  прямоугольника. Обозначим через  $x$  и  $y$  расстояния от точки  $M$  до прямых  $CD$  и  $BC$  соответственно. Тогда требование задачи можно записать так:  $x + (x + b) = y + (y + a)$ , или  $y = x + (b - a)/2$ . Заметим, что числа  $x$  и  $y$  можно рассматривать как координаты точки  $M$  в системе координат с осями  $Cx$  и  $Cy$ . В этой системе координат уравнение  $y = x + (b - a)/2$  определяет прямую, параллельную биссектрисе угла  $xCy$ . Таким образом, мы доказали, что среди точек, лежащих в рассматриваемом угле, требованию задачи удовлетворяют те и только те точки, которые лежат на прямой  $y = x + (b - a)/2$ .

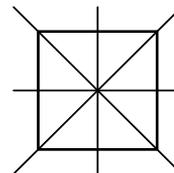
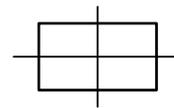
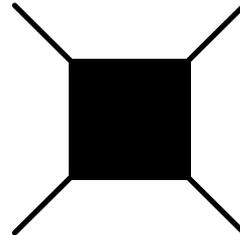
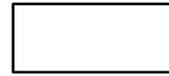
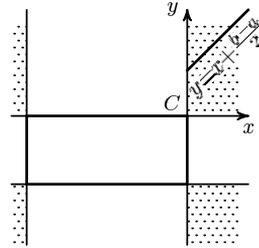
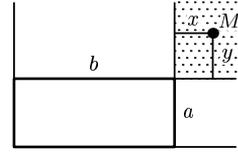
Такие же рассуждения можно провести и для остальных трёх углов. Итак, мы исследовали все точки плоскости. Множество всех точек, удовлетворяющих поставленному требованию, изображено на рисунке.

Нужно ещё рассмотреть случай, когда прямоугольник — квадрат, т. е.  $a = b$ , и выяснить, во что превратится искомое множество точек. Легко видеть, что это будет объединение квадрата и продолжений его диагоналей (?). □

Отметим, что *поскольку прямоугольник имеет две оси симметрии и пары его симметричных сторон фигурируют в условиях совершенно равноправно, то требуемое множество точек должно иметь те же две оси симметрии*; поэтому при решении достаточно было исследовать точки не всей плоскости, а только одной из четвертей, на которые она делится этими осями.

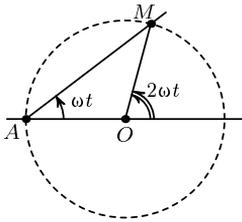
В случае квадрата все четыре оси симметрии квадрата являются также и осями симметрии искомого множества.

**Семейство линий и движение.** Наряду с множеством *точек* мы будем рассматривать и множество линий или, как чаще говорят, *семейство линий*.

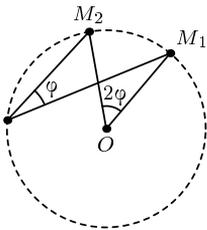


Если в геометрической задаче мы имеем дело с семейством окружностей или прямых, то удобно вообразить себе это семейство как одну двигающуюся окружность или прямую. На языке движения мы уже формулировали и решали первые задачи — этот язык неоднократно используется нами и в дальнейшем, поскольку на нём можно более наглядно объяснить многие задачи и теоремы.

За примером ходить далеко не надо. Вернёмся к задаче 1.1. Её результат можно представить себе так.

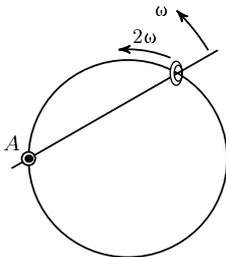


Пусть прямая  $AM$  вращается вокруг точки  $A$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (т. е. поворачивается на угол величины  $\omega$  за единицу времени), а прямая  $OM$  вращается вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $2\omega$ , причём в начальный момент времени обе прямые совпадали с прямой  $AO$ . Тогда точка  $M$  пересечения прямых движется по окружности с центром  $O$ .



Отсюда мы можем извлечь известную *теорему о вписанном угле*. Если прямая  $AM$  поворачивается за время  $t$  из положения  $AM_1$  в положение  $AM_2$  на угол  $\omega t$ , то прямая  $OM$  поворачивается на угол  $2\omega t$ , другими словами, *величина вписанного угла  $M_1AM_2$  равна половине угловой величины соответствующего центрального угла  $M_1OM_2$* .

Можно сформулировать эту теорему более наглядно, например так.



Теорема о колечке на окружности. На проволочную окружность надето маленькое колечко. Вокруг точки  $A$  окружности вращается стержень, который проходит через это колечко. *Если стержень вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ , то колечко при этом бежит по окружности равномерно с угловой скоростью  $2\omega$* .

Приведём ещё один пример теоремы, которую можно сформулировать на языке движений.

Пусть прямая  $l$  движется в плоскости *поступательно* и *равномерно*, т. е. так, что направление её не меняется, а точка  $M$  её пересечения с некоторой неподвижной прямой  $t$  движется равномерно по прямой  $t$ . Тогда *точка*

пересечения  $N$  прямой  $l$  с любой другой неподвижной прямой  $n$  также движется равномерно. Это, по существу, — переформулировка геометрической теоремы о том, что *параллельные прямые высекают на сторонах угла пропорциональные отрезки*. По аналогии с теоремой о колечке на окружности мы придадим этому факту такой вид.

**Теорема о колечке на прямой.** На две прямые в точке пересечения надето маленькое колечко. Если одна из прямых неподвижна, а другая движется поступательно (параллельно самой себе) и равномерно, то колечко движется также равномерно.

Нам неоднократно будут встречаться ниже разные семейства прямых. В тех случаях, когда речь идёт о семействе прямых, проходящих через одну точку или параллельных одному направлению, может пригодиться та или другая теорема о колечке.

**Задачи на построение.** В классических задачах на построение («построить треугольник», «отложить отрезок», «провести секущую», «найти точку») обычно имеется в виду, что построение нужно выполнить «циркулем и линейкой». Другими словами, мы можем проводить через любые две точки прямую, проводить окружность данного радиуса, а также находить точки пересечения проведённых линий.

Для решения таких задач удобно представлять окружности и прямые как множества точек, удовлетворяющих некоторому условию.

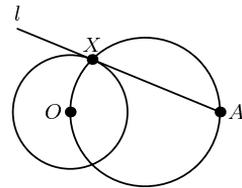
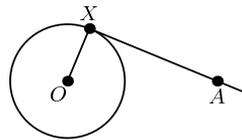
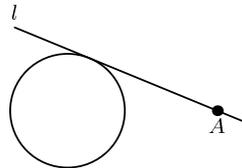
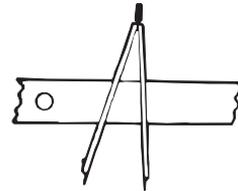
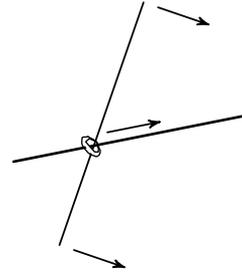
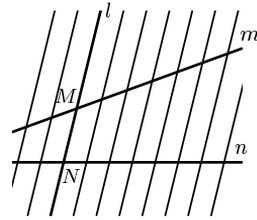
**1.4.** Дана окружность и вне её точка  $A$ .

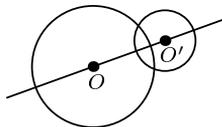
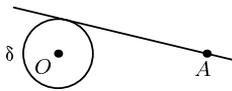
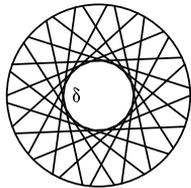
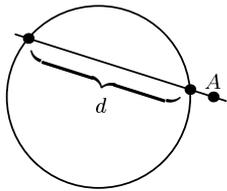
Провести через точку  $A$  прямую  $l$ , касательную к данной окружности.

□ Если  $X$  — точка касания прямой  $l$  с окружностью, то угол  $OXA$  — прямой. Множество точек  $M$ , для которых угол  $OMA$  прямой, — это, как мы знаем, окружность с диаметром  $OA$ .

Таким образом, построение прямой  $l$  можно выполнить так. Проведём окружность, имеющую отрезок  $OA$  диаметром.

Найдём точку  $X$  пересечения этой окружности с данной (таких точек — две, они





симметричны относительно прямой  $OA$ ). Затем через точки  $A$  и  $X$  проведём прямую  $l$ .  $\square$

**1.5.** Даны точка  $A$  и окружность. Провести через точку  $A$  прямую так, чтобы хорда, высекаемая окружностью на этой прямой, имела данную длину  $d$ .

$\square$  Рассмотрим множество всех прямых, на которых окружность высекает хорду длины  $d$ . Эти прямые — касательные к одной определённой окружности  $\delta$ , центр которой совпадает с центром  $O$  данной окружности, а радиус, равен  $\sqrt{r^2 - d^2/4}$ , где  $r$  — радиус данной окружности (?). Таким образом, задача сводится к предыдущей: провести касательную через точку  $A$  к окружности  $\delta$  с центром  $O$ .

Задача имеет два решения, если точка  $A$  лежит вне окружности  $\delta$ , одно — если на окружности  $\delta$ , и ни одного — если внутри окружности  $\delta$ .  $\square$

Часто искомое множество удаётся получить из известного множества некоторым простым преобразованием: *поворотом, симметрией, параллельным переносом* или *гомотетией*. (Этот приём особенно полезен в задачах на построение.) Напомним, как построить образ прямой и окружности при перемещении или преобразовании подобия.

Для прямой достаточно построить две точки  $A'$  и  $B'$  — образы некоторых её точек  $A$  и  $B$  — и провести через точки  $A'$  и  $B'$  прямую.

Для окружности радиуса  $r$  достаточно построить точку  $O'$  — образ её центра  $O$  — и провести окружность с центром  $O'$  того же радиуса (если речь идёт о перемещении) или радиуса  $kr$  (если  $k$  — коэффициент подобия).

Приведём типичные примеры задач, где используются преобразования (в данном случае — перемещения).

**1.6.** Дана точка  $A$  и окружность. Найти множество вершин  $M$  равносторонних треугольников  $ANM$ , у которых вершина  $N$  лежит на данной окружности.

$\square$  Пусть  $N$  — какая-нибудь точка данной окружности. Если мы повернём отрезок  $AN$  на  $60^\circ$  относительно точки  $A$ , то точка  $N$  попа-

дает в вершину  $M$  равностороннего треугольника  $ANM$ . Отсюда сразу видно, что если мы повернём окружность, как жёсткую фигуру, относительно точки  $A$  на  $60^\circ$ , то каждая её точка  $N$  перейдёт в соответствующую ей третью вершину  $M$  равностороннего треугольника  $ANM$ .

Таким образом, все точки  $M$  лежат на одной из двух окружностей, получающихся из данной поворотом на  $60^\circ$  по и против часовой стрелки относительно точки  $A$ .

Точно так же можно показать, что каждая точка  $M$  из объединения двух полученных окружностей является вершиной некоторого равностороннего треугольника  $ANM$ .  $\square$

**1.7а.** Дан угол и внутри него точка  $D$ . Построить отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находилась бы в точке  $D$ .

$\square$  Рассмотрим множество отрезков, у которых один конец лежит на стороне  $AC$  данного угла (с вершиной  $A$ ), а середина находится в данной точке  $D$ . Вторые концы этих отрезков принадлежат, очевидно, лучу, симметричному стороне  $AC$  угла относительно точки  $D$ .

Построение сводится к следующему: отмечаем точку  $A'$ , симметричную точке  $A$  относительно  $D$ , проводим через  $A'$  прямую, параллельную прямой  $AC$ , до пересечения в точке  $E$  с прямой  $AB$ , и получаем нужный отрезок  $EF$  с серединой в точке  $D$ . Задача всегда имеет единственное решение.  $\square$

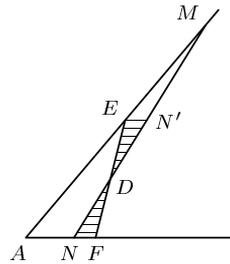
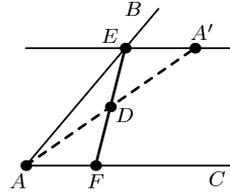
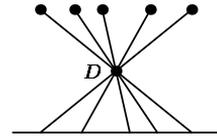
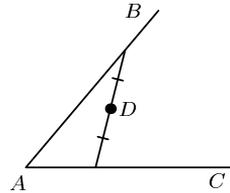
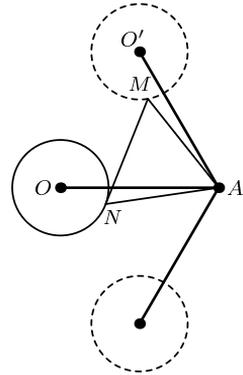
Любопытно, что это построение решает следующую задачу.

**1.7б.** Дан угол и внутри него точка  $D$ . Провести через точку  $D$  прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей возможной площади.

$\square$  Докажем, что искомая прямая — как раз та прямая  $EF$ , которую мы построили в предыдущей задаче, т. е. та, для которой отрезок, высекаемый сторонами угла, делится точкой  $D$  пополам.

Проведём через точку  $D$  прямую  $MN$ , отличную от  $EF$ , и докажем, что

$$S_{MAN} > S_{EAF}. \quad (1)$$



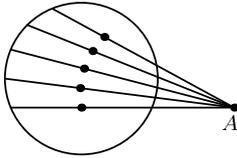
Можно считать, что точка  $M$  на стороне  $AB$  расположена дальше от вершины угла  $A$ , чем  $E$  (тот случай, когда  $M$  лежит ближе к  $A$ , чем  $E$ , рассматривается аналогично — стороны  $AB$  и  $AC$  меняются ролями). Достаточно убедиться, что

$$S_{EDM} > S_{FDN}, \quad (2)$$

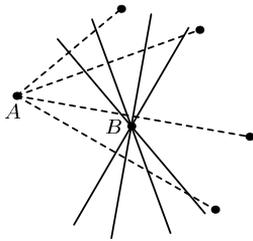
— отсюда сразу будет следовать неравенство (1). Но неравенство (2) очевидно, потому что треугольник  $EDM$  целиком содержит треугольник  $EDN'$ , симметричный треугольнику  $FDN$  относительно точки  $D$ .  $\square$

**Множество задач.**

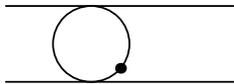
**1.8.** Даны две точки  $A$  и  $B$ . Найти множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки  $A$  на всевозможные прямые, проходящие через точку  $B$ .



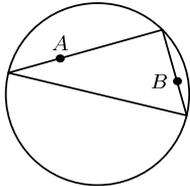
**1.9.** На плоскости даны окружность и точка  $A$ . Найти множество середин хорд, отсекаемых данной окружностью на прямых, проходящих через точку  $A$ . (Разумеется, надо рассмотреть все случаи: когда точка  $A$  лежит внутри окружности, вне окружности и на ней.)



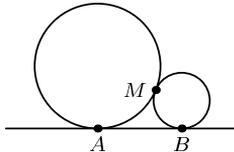
**1.10.** Даны две точки  $A$  и  $B$ . Найти множество точек, каждая из которых симметрична точке  $A$  относительно некоторой прямой, проходящей через точку  $B$ .



**1.11.** Построить окружность, касательную к двум данным параллельным прямым и проходящую через данную точку, лежащую между прямыми.



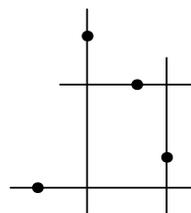
**1.12.** Построить окружность данного радиуса  $r$ , касательную к данной прямой и данной окружности.



**1.13.** Даны окружность и две точки  $A$ ,  $B$  внутри неё. Требуется вписать в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы катеты его проходили соответственно через данные точки.  $\downarrow$

**1.14.** Даны точки  $A$  и  $B$ . Две окружности касаются прямой  $AB$ , одна — в точке  $A$ , другая — в точке  $B$  и касаются друг друга в точке  $M$ . Найти множество таких точек  $M$ .  $\downarrow$

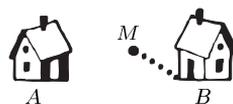
**1.15.** На плоскости даны четыре точки. Найти множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки. ↓



**1.16.** Стороны  $OP$  и  $OQ$  прямоугольника  $OPMQ$  лежат на сторонах данного прямого угла. Найти множество точек  $M$  при условии, что:

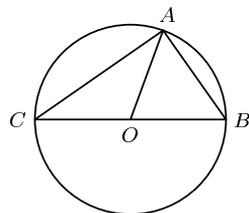
- длина диагонали  $PQ$ ,
- сумма длин сторон  $OP$  и  $OQ$ ,
- сумма квадратов длин сторон  $OP$  и  $OQ$  равна данной величине  $d$ .

**1.17.** Найти множество точек, сумма квадратов расстояний от которых до четырёх сторон данного прямоугольника (или до их продолжений) равна квадрату его диагонали.



**1.18.**  $A$  и  $B$  — два города. Найти множество точек  $M$ , обладающих следующим свойством: если идти напрямик из  $M$  в  $B$ , то расстояние до  $A$  будет всё время увеличиваться.

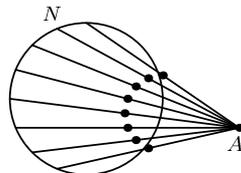
**1.19.** Пусть про треугольник  $ABC$  известно, что длина медианы  $AO$



- равна половине длины стороны  $BC$ ,
- больше половины длины стороны  $BC$ ,
- меньше половины длины стороны  $BC$ .

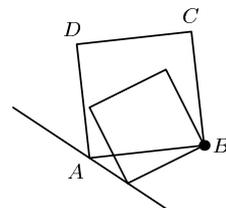
Доказать, что угол  $A$  соответственно а) прямой, б) острый, в) тупой.

**1.20.** На плоскости даны окружность и точка  $A$ . Найти множество середин отрезков  $AN$ , где  $N$  — произвольная точка данной окружности.



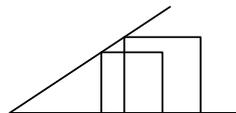
**1.21.** Дан круг и точка вне его. Провести через эту точку секущую так, чтобы длина отрезка секущей вне окружности равнялась длине отрезка внутри неё.

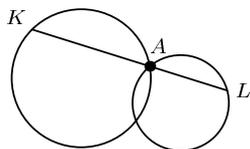
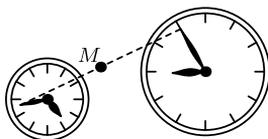
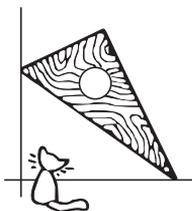
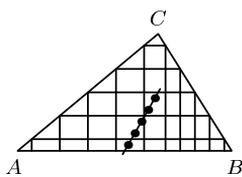
**1.22.** Через точку пересечения двух данных окружностей провести прямую, на которой эти окружности высекают хорды равной длины.



**1.23.** Найти множество вершин  $C$  квадратов  $ABCD$ , у которых вершина  $A$  находится на данной прямой, а вершина  $B$  — в данной точке.

**1.24.** а) Где может находиться четвёртая вершина квадрата, если две его вершины лежат на одной стороне данного острого угла, а третья — на другой?





б) Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Вписать в него квадрат, у которого две вершины лежат на стороне  $AB$ .

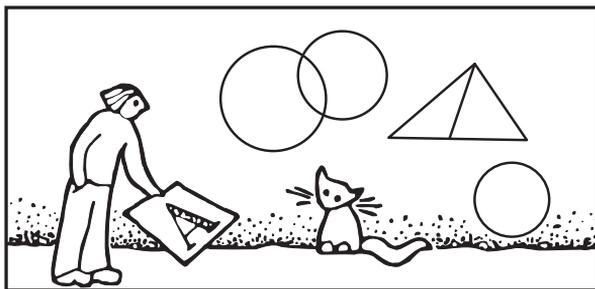
**1.25\***. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам? ↓

**1.26\***. В данный треугольник  $ABC$  вписываются всевозможные прямоугольники, у которых одна сторона лежит на прямой  $AB$ . Найти множество центров этих прямоугольников.

**1.27.** Деревянный прямоугольный треугольник перемещается по плоскости так, что вершины его острых углов двигаются по двум сторонам данного прямого угла. Как будет двигаться вершина прямого угла этого треугольника?

**1.28\***. На столе лежат двое плоских часов. И те и другие идут точно. По какой линии движется середина  $M$  отрезка, соединяющего концы их минутных стрелок? ↓

**1.29\***. Через точку  $A$  пересечения двух данных окружностей проводится произвольная прямая, которая пересекает эти окружности ещё раз в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Найти множество середин отрезков  $KL$ . ↓



## § 2. Алгебра

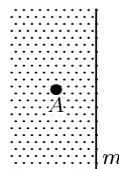
Этот параграф — справочник теорем о множествах точек, удовлетворяющих тем или иным геометрическим условиям. Мы постепенно составим целый список таких теорем и условий, которые можно использовать при решении задач разного типа.

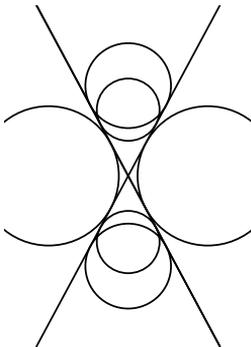
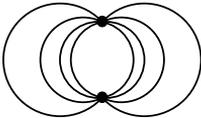
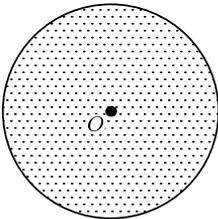
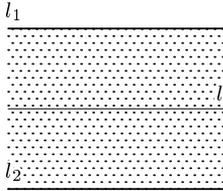
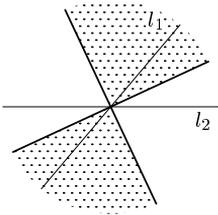
Можно провести параллель между геометрическими задачами: найти множество точек — и обычными алгебраическими задачами: решить уравнение (систему уравнений, неравенство). Действительно, решить уравнение или неравенство — значит найти множество чисел, удовлетворяющих некоторому условию. Подобно тому как в школьном курсе алгебры самые разные уравнения (например, тригонометрические, логарифмические) сводятся обычно к линейным или квадратным, часто даже замысловатое геометрическое условие оказывается лишь новым свойством прямой или окружности.

Аналогия между алгебраическими задачами и задачами на отыскание множеств точек не только внешняя. С помощью метода координат можно свести одно к другому. Используя этот метод, мы увидим, что геометрические условия, кажущиеся на первый взгляд различными, охватываются общими теоремами.

Начнём нашу алгебру с самых простых утверждений.

**А.** *Множество точек, одинаково удалённых от двух данных точек  $A$  и  $B$ , — прямая, перпендикулярная отрезку  $AB$  и проходящая через его середину.*





Эту прямую  $t$  мы будем называть *медиатрисой* отрезка  $AB$ . Она делит плоскость на две полуплоскости. Точки одной полуплоскости ближе к  $A$ , чем к  $B$ , а другой — наоборот. Точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно  $t$ .

**Б.** Множество точек, одинаково удалённых от двух данных пересекающихся прямых  $l_1$  и  $l_2$ , — две взаимно перпендикулярные прямые, делящие пополам углы, образованные прямыми  $l_1$  и  $l_2$ .

Эти прямые служат осями симметрии фигуры, состоящей из прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Это множество — «крест биссектрис» разбивает плоскость на четыре области. На рисунке отмечены два прямых угла — множество точек, расположенных ближе к прямой  $l_1$ , чем к прямой  $l_2$ .

**В.** Множество точек, расстояние от которых до данной прямой  $l$  равно данному числу  $h$  ( $h > 0$ ), — пара прямых  $l_1, l_2$ , параллельных прямой  $l$  и расположенных по разные стороны от  $l$ .

Полоса между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  — это множество точек, которые находятся от прямой  $l$  на расстоянии, меньшем  $h$ .

**Г.** Множество точек, расстояние которых до данной точки  $O$  равно данному числу  $r$  ( $r > 0$ ), — окружность радиуса  $r$  с центром  $O$ . (Это — определение окружности.)

Окружность разбивает плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю. Для точек внутри круга расстояние до центра меньше  $r$ , а для точек вне круга — больше  $r$ .

Несколько простых переформулировок условий **А**, **Б**, **В**, **Г** мы предлагаем в виде следующих четырёх задач.

**2.1.** Найти множество центров окружностей, проходящих через две данные точки.

**2.2.** Найти множество центров окружностей, касающихся двух данных пересекающихся прямых.

**2.3.** Найти множество центров окружностей радиуса  $r$ , касающихся данной прямой.

**2.4.** Даны две точки  $A$  и  $B$ . Найти множество таких точек  $M$ , для которых площадь

$S_{AMB}$  треугольника  $AMB$  равна данному числу  $c$  ( $c > 0$ ).

Проиллюстрируем утверждение **Б** одним более содержательным примером — докажем теорему о биссектрисах треугольника.

**2.5.** Пусть «крест биссектрис» прямых  $AC$  и  $BC$  пересекает прямую  $AB$  в точках  $E$  и  $F$ . Доказать, что

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|CB|}.$$

□ Пусть  $M$  — одна из точек  $E$  и  $F$ . Заметим, что

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{S_{ACM}}{S_{MCB}}.$$

(Треугольники  $ACM$  и  $MCB$  имеют общую высоту  $CH$ .)

Отношение площадей можно выразить и по-другому; поскольку точка  $M$  принадлежит кресту биссектрис, то она равноудалена от прямых  $AC$  и  $BC$ , значит,

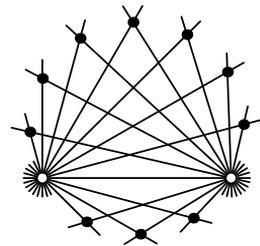
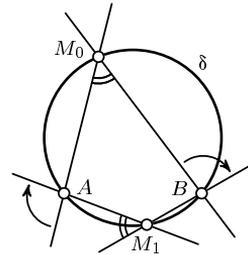
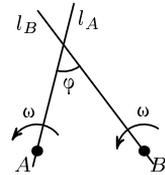
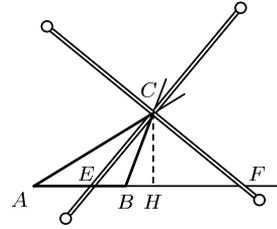
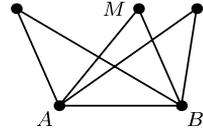
$$\frac{S_{ACM}}{S_{MCB}} = \frac{|AC|}{|CB|}. \quad \square$$

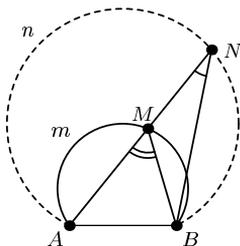
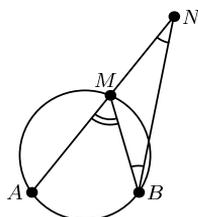
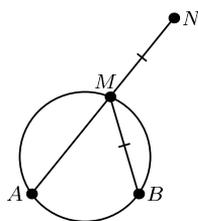
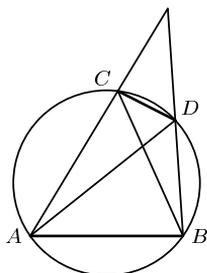
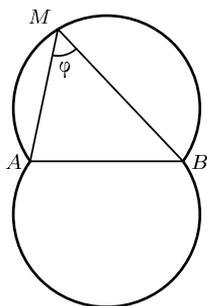
**Окружность и пара дуг.** Следующий пункт азбуки — ещё один вариант теорем о вписанном угле и о колечке на окружности, которые мы обсуждали в § 1.

**Д°.** Две пересекающиеся прямые  $l_A$  и  $l_B$  вращаются в плоскости вокруг двух своих точек  $A$  и  $B$  с одинаковой угловой скоростью  $\omega$  (при этом, конечно, величина угла между ними остаётся постоянной). Траектория точки пересечения этих прямых — окружность.

□ Построим окружность  $\delta$ , проходящую через три точки:  $A$ ,  $B$  и ещё одно положение  $M_0$  точки пересечения прямых  $l_A$  и  $l_B$ . По теореме «о колечке на окружности» из § 1 точка пересечения прямой  $l_A$  и окружности  $\delta$  движется по окружности  $\delta$  равномерно с угловой скоростью  $2\omega$ . Точно так же движется и точка пересечения  $l_B$  с окружностью  $\delta$ . Поскольку в один момент (положение  $M_0$ ) они совпадают, то они совпадают и в любой другой момент времени. □

Приведём ещё один вариант теоремы **Д**, не использующий язык движений.





**Д.** Множество точек, из которых данный отрезок  $AB$  виден под углом данной величины  $\varphi$  (т. е. множество точек  $M$ , для которых  $\angle AMB = \varphi$ ), — пара дуг с концами в точках  $A$  и  $B$ , симметричных относительно прямой  $AB$ .

Область, ограниченная этими двумя дугами, — множество точек  $M$ , для которых  $\angle AMB > \varphi$ .

Заметим, что если  $\varphi = 90^\circ$ , то множество **Д** будет окружностью с диаметром  $AB$ . Мы уже говорили об этом после задачи **0.1**.

**2.6.** У данной окружности хорда  $AB$  закреплена, а хорда  $CD$  перемещается, не меняя своей длины. По какой линии движется точка пересечения прямых а)  $AD$  и  $BC$ , б)  $AC$  и  $BD$ ?

**2.7.** На плоскости нарисованы два непересекающихся круга. Угол, изготовленный из прозрачного материала, движется по плоскости так, что он покрывает круги и его стороны касаются соответственно этих двух кругов. Доказать, что на угле можно отметить точку, которая будет двигаться по дуге окружности.

**2.8a.** Задана окружность и две точки  $A$  и  $B$  на ней. Пусть  $M$  — произвольная точка этой же окружности. На продолжении отрезка  $AM$  от точки  $M$  откладывается отрезок  $MN$ , равный по длине отрезку  $BM$ . Найти множество точек  $N$ .

□ Пусть  $N$  — некоторая точка, построенная так, как указано в задаче, тогда  $|BM| = |NM|$  и  $\angle NBM = \angle MNB$ . Но так как  $\angle AMB = \angle MBN + \angle MNB$ , то  $\angle ANB = \angle AMB/2$ . Величина угла  $AMB$  для всех точек  $M$ , лежащих на одной из дуг  $\smile AB$  одна и та же (см. **Д**):  $\angle AMB = \varphi$ . Поэтому  $\angle ANB = \varphi/2$ , т. е. все эти точки лежат на дуге  $\smile AnB$ , вмещающей угол  $\varphi/2$ . (Центр дуги лежит на середине дуги  $\smile AmB$  данной окружности (?).)

Все ли точки дуги  $\smile AnB$  нас устраивают? Нет, не все.

Заметим, что когда точка  $M$  пробегает дугу  $\smile AnB$  от точки  $B$  до точки  $A$ , хорда  $AM$  вращается вокруг точки  $A$  от прямой  $AB$  до касательной к данной окружности в точке  $A$ .

Поэтому искомому множеству принадлежит только часть дуги  $\smile AnB$ , а именно, дуга  $\smile EnB$  ( $E$  — точка пересечения дуги  $\smile AnB$  с касательной в точке  $A$ ).

При этом можно считать, что точка  $B$  принадлежит нашему множеству (она получается для того положения  $M$ , когда  $M$  совпадает с  $B$  и «длина отрезка  $MB$  равна 0»). Точка  $E$ , строго говоря, не принадлежит нашему множеству; когда точка  $M$  совпадает с точкой  $A$ , не имеет смысла говорить о направлении прямой  $AM$ .

Аналогично рассматриваются точки, лежащие по другую сторону от прямой  $AB$ .

Итак, искомое множество точек состоит из двух дуг  $\smile EnB$  и  $\smile E'n'B$ .  $\square$

Можно решить задачу **2.8a** и иначе, если заметить, что точки  $N$  и  $B$  симметричны относительно прямой  $CM$ , где  $C$  — середина дуги  $\smile AmB$ . Из этого наблюдения следует, что множество точек  $N$  сводится к множеству точек из задачи **1.10** для точек  $A$  и  $C$ .

Приведём задачу, аналогичную **2.8a**, в которой читателю предлагается провести такое же исследование.

**2.8б.** Условие такое же, как и в задаче **2.8a**, только отрезок  $MN$  откладывается в противоположную сторону: на луче  $MA$ .

**Квадраты расстояний.** Рассмотрим две точки  $A$  и  $B$  на плоскости и произвольное число  $c$ .

**Е.** Множество точек  $M$ , для которых

$$|AM|^2 - |BM|^2 = c,$$

— прямая, перпендикулярная отрезку  $AB$ . (В частности, при  $c = 0$  получается медиатриса **A**.)

**Ж.** Пусть  $|AB| = 2a$ . Множество точек  $M$ , для которых

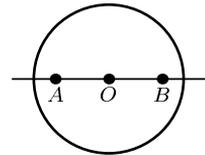
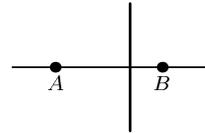
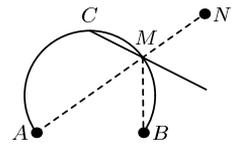
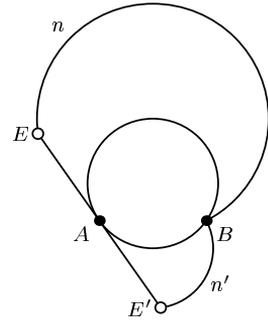
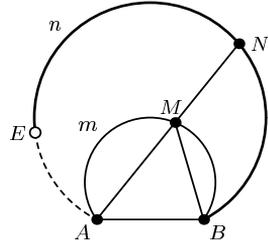
$$|AM|^2 + |BM|^2 = c$$

а) при  $c > 2a^2$  — окружность с центром в середине  $O$  отрезка  $AB$  и радиуса  $r = \sqrt{(c - 2a^2)/2}$ ,

б) при  $c = 2a^2$  — точка  $O$ ,

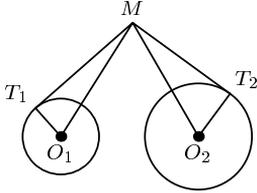
в) при  $c < 2a^2$  — пустое множество.

Утверждения **Е** и **Ж** нетрудно доказать с помощью теоремы Пифагора или методом координат (?). Мы не будем приводить отдельных доказательств для каждого из них, а выведем их



как следствия более общей теоремы. Но прежде проиллюстрируем их несколькими примерами.

**2.9.** Найти множество точек, для которых касательные, проведённые к двум данным окружностям, равны по длине.



□ Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы ( $r_2 \geq r_1$ ),  $MT_1$  и  $MT_2$  — касательные к ним, проведённые из точки  $M$ . Используя теорему Пифагора, условие  $|MT_1|^2 = |MT_2|^2$  запишем так:

$$|MO_1|^2 - |O_1T_1|^2 = |MO_2|^2 - |O_2T_2|^2,$$

или

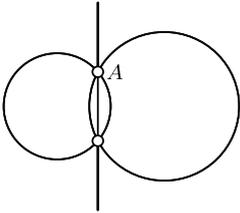
$$|MO_2|^2 - |MO_1|^2 = r_2^2 - r_1^2.$$

Согласно утверждению **Е** множество точек  $M$  содержится в прямой, перпендикулярной прямой  $O_1O_2$ .

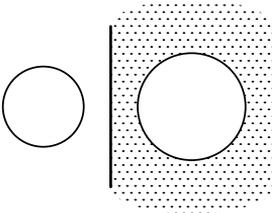
Если окружности пересекаются, то эта прямая проходит через точку их пересечения. В самом деле, если  $A$  — одна из этих точек, то

$$|O_2A|^2 - |O_1A|^2 = r_2^2 - r_1^2$$

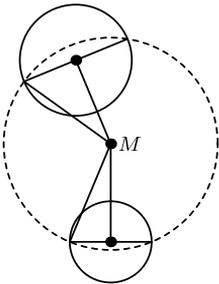
и, следовательно, точка  $A$  лежит на этой прямой. Множество искомых точек в этом случае изображено на рисунке; это — объединение двух лучей.



Если окружности концентрические (и  $r_2 > r_1$ ), то искомое множество пусто. Если окружности совпадают, то — все точки вне круга. Если окружности не пересекаются и не концентричны, то ответом будет прямая. □



Прямая, о которой говорится в задаче **2.9**, называется *радикальной осью двух окружностей*. Пусть даны две непересекающиеся окружности. Тогда их радикальная ось разбивает дополнение к двум кругам на две области: множество точек  $M$ , для которых  $|MT_1| > |MT_2|$ , и множество точек  $M$ , для которых  $|MT_1| < |MT_2|$ .



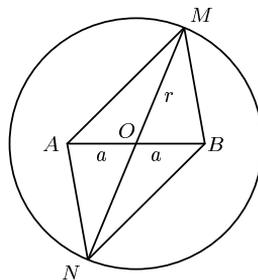
**2.10.** Найти множество центров окружностей, которые пересекают каждую из двух данных окружностей в диаметрально противоположных точках.

**2.11.** а) Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. Доказать.

б) Если у выпуклого четырёхугольника  $AMBN$  диагонали взаимно перпендикулярны, то  $|AM|^2 + |BN|^2 = |AN|^2 + |BM|^2$ . Доказать.  $\downarrow$

□ а) Пусть вершины  $A$  и  $B$  параллелограмма  $AMBN$  находятся на расстоянии  $a$  от его центра  $O$ , вершины  $M$  и  $N$  — на расстоянии  $r$  от  $O$  и  $c = 2(a^2 + r^2)$ . Поскольку  $|OM| = \sqrt{(c - 2a^2)}/2$ , то, согласно **Ж**, сумма квадратов расстояний от точки  $M$  до точек  $A$  и  $B$  равна  $c$ . Точно так же  $|AN|^2 + |BN|^2 = c$ , поэтому

$$\begin{aligned} |AM|^2 + |BM|^2 + |AN|^2 + |BN|^2 &= 2c = \\ &= 4(a^2 + r^2) = |MN|^2 + |AB|^2. \quad \square \end{aligned}$$



Приведём теперь общую теорему, которая включает в себя пункты **Е**, **Ж**, **А**, **З** азбуки.

**Теорема о квадратах расстояний.** Множество точек  $M$ , для которых выполняется условие

$$\lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_2|^2 + \dots + \lambda_n |MA_n|^2 = \mu, \quad (1)$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — заданные точки,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu$  — заданные числа, представляет собой одну из следующих простейших геометрических фигур:

1° если  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \neq 0$ , это может быть окружность, точка или пустое множество;

2° если  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$ , это может быть прямая, вся плоскость или пустое множество.

Доказательство теоремы проведём с помощью метода координат.

□ Квадрат расстояния между точками  $M(x; y)$  и  $A_k(x_k; y_k)$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} |MA_k|^2 &= (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = \\ &= x^2 + y^2 - 2x_k x - 2y_k y + x_k^2 + y_k^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение

$$\lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_2|^2 + \dots + \lambda_n |MA_n|^2.$$

Для того чтобы записать его в координатах, надо сложить несколько выражений вида

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2).$$

Ясно, что в результате условие (1) запишется в виде уравнения

$$dx^2 + dy^2 + ax + by + c = 0, \quad (2)$$

где  $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ .

Докажем теперь, что уравнение (2) задаёт одну из фигур, перечисленных нами выше.

1°. Если  $d \neq 0$ , то мы можем преобразовать уравнение (2) следующим образом:

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d} = 0,$$

или

$$\left(x + \frac{a}{2d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2d}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2 - 4dc}{4d^2}. \quad (2')$$

Мы видим, что оно задаёт:

окружность с центром в точке  $C\left(-\frac{a}{2d}; -\frac{b}{2d}\right)$ , если правая часть (2') положительна;

одну точку  $C\left(-\frac{a}{2d}; -\frac{b}{2d}\right)$ , если правая часть равна нулю;

пустое множество, если правая часть отрицательна.

2°. Если  $d = 0$ , то уравнение (2) принимает вид

$$ax + by + c = 0.$$

Это будет:

прямая, если  $a^2 + b^2 \neq 0$ ;

вся плоскость, если  $a = b = c = 0$ ;

пустое множество, если  $a = b = 0, c \neq 0$ .  $\square$

В конкретной задаче, как правило, легко выяснить, какой из этих случаев имеет место. Вернёмся снова к пунктам **Е** и **Ж** нашей азбуки, которые остались недоказанными.

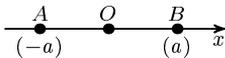
**Доказательство Е.** Условие  $|MA|^2 - |MB|^2 = c$  — частный случай (1), где  $n = 2$ ,  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ , откуда  $d = 0$ , и, следовательно, оно определяет либо прямую, либо плоскость, либо пустое множество.

Поскольку уравнение

$$(x + a)^2 - (x - a)^2 = c$$

имеет всегда одно решение  $x = c/(4a)$ , то на прямой  $AB$  существует одна точка множества. Следовательно, искомое множество — прямая. Из соображения симметрии ясно, что эта прямая перпендикулярна прямой  $AB$ .  $\square$

**Доказательство Ж.** Условие  $|MA|^2 + |MB|^2 = c$  — частный случай (1), здесь  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, d \neq 0$ , и следовательно, искомое множество — либо пустое множество, либо точка, либо



окружность. Поскольку точки  $A$  и  $B$  фигурируют в условии симметрично, то центр окружности находится в середине отрезка  $AB$ .

Для того чтобы узнать, когда искомое множество — окружность, и определить её радиус, найдём на прямой  $AB$  точки, удовлетворяющие условию  $|AM|^2 + |BM|^2 = c$ . Для этого заметим, что уравнение  $(x - a)^2 + (x + a)^2 = c$  имеет решение при  $c \geq 2a^2$ , причём

$$|x| = r = \sqrt{(c - 2a^2)/2}. \quad \square$$

**2.12.** Найти множество точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух противоположных вершин данного прямоугольника равна сумме квадратов расстояний до двух других его вершин.

$\square$  *Ответ.* Вся плоскость. Докажем это. Пусть  $ABCD$  — данный прямоугольник, и тогда мы ищем множество точек  $M$ , для которых

$$|MA|^2 + |MC|^2 - |MB|^2 - |MD|^2 = 0.$$

Положим в условии (1)  $n = 4$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$  и  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ . Согласно теореме искомое множество — либо прямая, либо пустое множество, либо вся плоскость.

Заметим, что вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  самого прямоугольника удовлетворяют условию. Например, для точки  $A$  верно равенство  $|AA|^2 + |AC|^2 - |AB|^2 - |AD|^2 = 0$  (теорема Пифагора). Следовательно, искомое множество не пустое и не является прямой. Отсюда вытекает, что искомое множество — вся плоскость.  $\square$

Из результата задачи **2.12** следует, что если  $ABCD$  — прямоугольник, то для любой точки  $M$  плоскости выполняется равенство

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2.$$

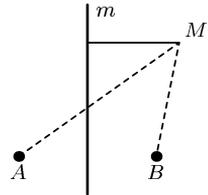
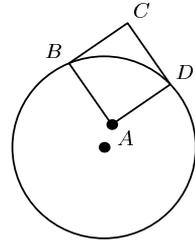
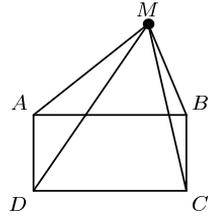
Используя этот факт, решите следующую задачу.

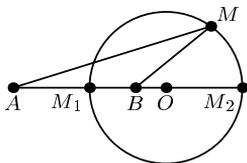
**2.13.** Даны круг и точка  $A$  внутри него. Найти множество четвёртых вершин  $C$  прямоугольников  $ABCD$ , вершины  $B$  и  $D$  которых принадлежат данной окружности.

**2.14.** Доказать, что

$$|MA|^2 - |MB|^2 = 2|AB|\rho(M, m),$$

где  $m$  — медиатриса отрезка  $AB$ , причём  $|MA| > |MB|$ .





Добавим к нашей азбуке ещё один пункт, который часто используется в геометрии и является также следствием теоремы о квадратах расстояний.

**И<sup>1</sup>**). Множество точек  $M$ , для которых

$$|MA|/|MB| = k, \quad k > 0, \quad k \neq 1,$$

есть окружность, диаметр которой принадлежит прямой  $AB$ .

Это множество точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек  $A$  и  $B$  постоянно, называется *окружностью Аполлония*.

□ Перепишем условие **И** в виде

$$|MA|^2 - k^2|MB|^2 = 0.$$

Это условие — частный случай условия (1), где  $n = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -k^2$  и, следовательно, если  $1 - k^2 \neq 0$ , то искомое множество — либо окружность, либо точка, либо пустое множество. Поскольку уравнение

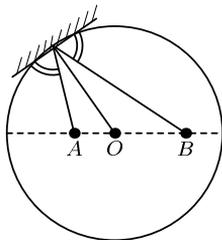
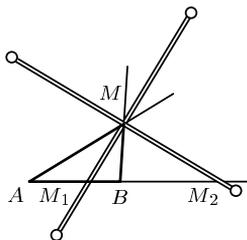
$$(x + a)^2 = k^2(x - a)^2$$

при  $k^2 \neq 1$  имеет всегда два решения, на прямой  $AB$  существуют две точки  $M_1$  и  $M_2$  этого множества и, следовательно, искомое множество — окружность. Поскольку условие симметрично относительно прямой  $AB$ , диаметр этой окружности — отрезок  $M_1M_2$ . □

Заметим кстати, что если  $M$  — точка окружности Аполлония, то крест биссектрис прямых  $AM$  и  $MB$  пересекает прямую  $AB$  в точках  $M_1$  и  $M_2$ . (Это следует из теоремы о кресте биссектрис **2.5**, так как  $\frac{|AM_1|}{|BM_1|} = \frac{|AM_2|}{|BM_2|} = \frac{|AM|}{|BM|}$ .)

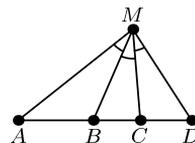
Это соображение используется в следующей задаче.

**2.15.** На диаметре круглого бильярдного стола были расположены два шара  $A$  и  $B$ . Шар  $B$  ударили так, что после одного отражения от борта стола он попал в шар  $A$ . Восстановить траекторию шара  $B$ , если удар не был направлен по диаметру.



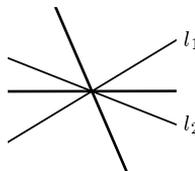
<sup>1</sup>) Мы пропустили здесь букву **З**, потому что она похожа на цифру 3. По той же причине в нашей азбуке не будет и буквы **О**.

**2.16.** На данной прямой лежат точки  $A, B, C, D$ . Построить на плоскости точку, из которой отрезки  $AB, BC$  и  $CD$  видны под одним и тем же углом.

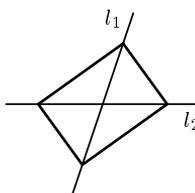


**Расстояния до прямых.** До сих пор в азбуке в основном обыгрывались те или иные свойства, определяющие окружность. В следующих двух пунктах азбуки будут фигурировать только прямые (которые встречаются парочками).

Рассмотрим две пересекающиеся прямые  $l_1$  и  $l_2$  на плоскости и положительное число  $s$ .



**К.** Множество точек  $M$ , отношение  $\rho(M, l_1)/\rho(M, l_2)$  расстояний которых до прямых  $l_1$  и  $l_2$  равно  $s$ , — пара прямых, проходящих через точку пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$ .



**Л.** Множество точек  $M$ , сумма  $\rho(M, l_1) + \rho(M, l_2)$  расстояний которых до прямых  $l_1$  и  $l_2$  равна  $s$ , — контур прямоугольника, диагонали которого лежат на прямых  $l_1$  и  $l_2$ .

Прежде чем доказывать эти теоремы, проиллюстрируем их на двух примерах.

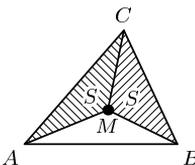
**2.17.** Дан треугольник  $ABC$ . Найти множество точек  $M$ , для которых  $S_{AMC} = S_{BMC}$ .

□ Пусть  $h_b$  и  $h_a$  — расстояния от точки  $M$  до прямых  $AC$  и  $BC$  соответственно. Тогда

$$S_{AMC} = \frac{|AC| \cdot h_b}{2}, \quad S_{BMC} = \frac{|BC| \cdot h_a}{2},$$

следовательно,  $h_a/h_b = |AC|/|BC|$ .

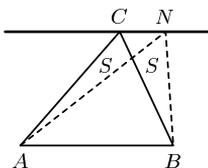
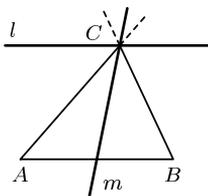
Тем самым искомое множество точек  $M$  — это множество **К** для прямых  $AC$  и  $BC$  и  $s = |AC|/|BC|$ . Таким образом, оно представляет собой пару прямых, проходящих через точку  $C$ . Покажем, что одна из прямых  $m$  содержит медиану треугольника, а другая  $l$  параллельна прямой  $AB$ . Для этого достаточно взять по одной точке на каждой из этих прямых и проверить, что для них выполняется условие.

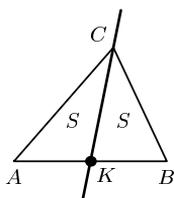


Обозначим через  $h$  длину высоты треугольника, проведённой из вершины  $C$ . Пусть  $N$  — точка прямой  $l$ , тогда

$$S_{ACN} = \frac{|CN| \cdot h}{2} \quad \text{и} \quad S_{BCN} = \frac{|CN| \cdot h}{2},$$

тем самым  $S_{ACN} = S_{BCN}$  и прямая  $l$  принадлежит искомому множеству.

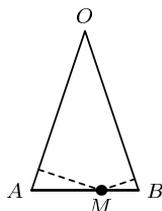




Пусть  $K$  — середина стороны  $AB$ , т. е.  $|AK| = |KB|$ . Тогда  $S_{AKC} = |AK| \cdot h/2 = |BK| \cdot h/2 = S_{BKC}$ , а тем самым и вся прямая  $m$  принадлежит искомому множеству.  $\square$

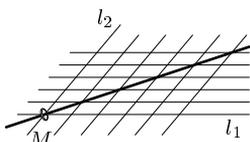
Можно по аналогии с крестом биссектрис назвать пару прямых  $m$  и  $l$  «крестом медиан» вершины  $C$  треугольника.

Утверждение **Л**, по сути дела, можно свести к такой задаче.



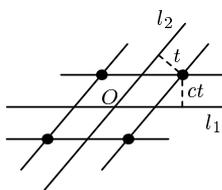
**2.18.** Дан равнобедренный треугольник  $AOB$ . Доказать, что сумма расстояний от точки  $M$  его основания  $AB$  до прямых  $AO$  и  $BO$  равна длине высоты, опущенной на боковую сторону.

Мы не будем приводить геометрические доказательства пунктов **К** и **Л** — хотя они и не сложны, — а представим их, пользуясь языком движений (подобно тому, как это сделано выше в пункте **Д** «окружность и пара дуг»). Сформулируем сначала лемму, обобщающую теорему о колечке на прямой (стр. 17).



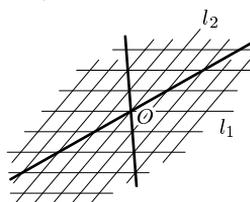
**Лемма.** На две прямые  $l_1$  и  $l_2$  в точке их пересечения надето маленькое колечко  $M$ . Если каждая прямая движется поступательно и равномерно, то колечко  $M$  при этом равномерно движется по некоторой прямой.

$\square$  Эту прямую можно построить, отметив два положения  $M_1$  и  $M_2$  колечка. Точки пересечения движущихся прямых с неподвижной прямой  $M_1M_2$  движутся равномерно. Поскольку в два момента времени (когда колечко  $M$  проходит через  $M_1$  и  $M_2$ ) эти точки совпадают друг с другом, они совпадают всё время.  $\square$



**Доказательство К.** Для некоторого положительного числа  $t$  множество точек, находящихся на расстоянии  $t$  от  $l_2$  и  $ct$  от  $l_1$  — четыре вершины параллелограмма с центром в точке  $O$  пересечения  $l_1$  и  $l_2$ . Действительно, множество точек, находящихся на расстоянии  $t$  от  $l_2$  — пара параллельных прямых (см. **В**), и множество точек, находящихся на расстоянии  $ct$  от  $l_1$  — тоже пара параллельных прямых, а их пересечение — четыре вершины параллелограмма. Эти четыре точки удовлетворяют условию **К**, так как

$$ct/t = c.$$



Меняя число  $t$  от 0 до бесконечности, мы получим все точки искомого множества.

Рассматривая  $t$  как «время», мы видим, что четыре проведённые прямые равномерно движутся (оставаясь параллельными  $l_1$  и  $l_2$ ). По лемме точки их пересечения — колечки — движутся по прямым, проходящим через точку  $O$ .  $\square$

**Доказательство Л.** Проведём две прямые на расстоянии  $t$  от  $l_1$  и две — на расстоянии  $c-t$  от  $l_2$  ( $0 \leq t \leq c$ ). Четыре точки пересечения этих прямых принадлежат искомому множеству. Когда «время»  $t$  меняется от 0 до  $c$ , прямые равномерно движутся, а каждая из четырёх точек их пересечения, согласно лемме, проходит отрезок. Концы этих отрезков, соответствующие  $t = 0$  и  $t = c$ , лежат на прямых  $l_1, l_2$  и являются вершинами прямоугольника.  $\square$

Приведём теперь общую теорему, которая включает в себя пункты азбуки **Б, В, К, Л**. Рассмотрим множество точек  $M$ , для которых

$$\lambda_1 \rho(M, l_1) + \lambda_2 \rho(M, l_2) + \dots + \lambda_n \rho(M, l_n) = \mu; \quad (3)$$

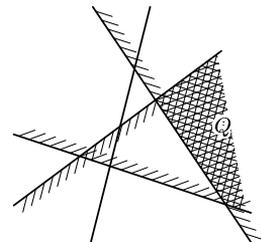
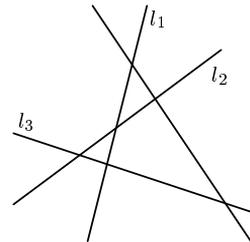
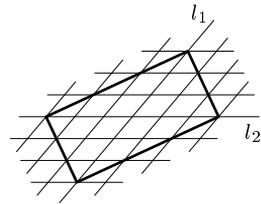
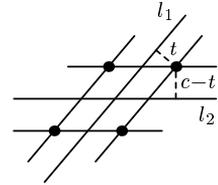
здесь  $l_1, l_2, \dots, l_n$  — заданные прямые,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu$  — заданные числа.

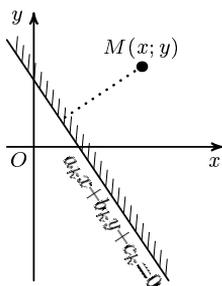
Описать это множество сразу на всей плоскости трудно. Однако, как мы сейчас увидим, в каждом из кусков, на которые прямые  $l_1, l_2, \dots, l_n$  разбивают плоскость, множество (3) представляет собой, как правило, просто часть некоторой прямой. Обозначим один из этих кусков через  $Q$ .

**Теорема о расстояниях до прямых.** *Множество точек, удовлетворяющих условию (3), принадлежащих  $Q$ , есть либо 1) пересечение куска  $Q$  с некоторой прямой (луч, отрезок или даже целая прямая), либо 2) весь кусок  $Q$ , либо 3) пустое множество.*

Разобравшись, что за множество получается в каждом куске, мы (как в задаче **1.3**) найдём всё искомое множество. Доказательство теоремы приведём с помощью метода координат.

$\square$  Пусть мы хотим найти множество точек в одном из кусков  $Q$  плоскости, на которые прямые  $l_1, l_2, \dots, l_n$  делят плоскость. Этот кусок  $Q$  плоскости можно пред-





ставить как пересечение  $n$  полуплоскостей с граничными прямыми  $l_1, l_2, \dots, l_n$ .

Уравнение  $a_k x + b_k y + c_k = 0$  прямой  $l_k$  можно выбрать таким, что в нужной полуплоскости  $a_k x + b_k y + c_k \geq 0$  и  $a_k^2 + b_k^2 = 1$  (?), тогда для точек  $M(x, y)$  из этой полуплоскости  $\rho(M, l_k) = a_k x + b_k y + c_k$ .

Для того чтобы величину

$$\lambda_1 \rho(M, l_1) + \lambda_2 \rho(M, l_2) + \dots + \lambda_n \rho(M, l_n)$$

записать в координатах, нужно сложить несколько линейных выражений вида  $\lambda_k a_k x + \lambda_k b_k y + \lambda_k c_k$ . В результате условие (3) записывается линейным уравнением

$$a x + b y + c = 0.$$

Если  $a^2 + b^2 \neq 0$ , то это прямая. Если  $a = b = 0$  — вся плоскость или пустое множество.  $\square$

Другое доказательство этой теоремы можно получить, сведя её с помощью задачи 2.14 к теореме о квадратах расстояний (?).

**2.19.** а) Дан правильный треугольник  $ABC$ .

Найти множество точек, для которых сумма расстояний до прямых  $AB, BC$  и  $CA$  равна данному числу  $\mu$  ( $\mu > 0$ ).  $\downarrow$

б) Дан прямоугольник  $ABCD$ . Найти множество точек, для которых сумма расстояний до прямых  $AB, BC, CD, DA$  равна данному числу  $\mu$ .

**2.20\*.** а) Три прямые  $l_0, l_1, l_2$  пересекаются в одной точке, причём величина угла между любыми двумя из них равна  $60^\circ$ . Найти множество точек  $M$ , для которых

$$\rho(M, l_0) = \rho(M, l_1) + \rho(M, l_2).$$

б) Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Найти множество точек  $M$ , для которых расстояние до одной из прямых  $AB, BC, CA$  равно полусумме расстояний до двух других.  $\downarrow$

**Вся азбука.** Множество точек, удовлетворяющих какому-то условию, обозначается так: в фигурных скобках пишется сначала буква, которую мы используем для обозначения «произвольной точки» множества (у нас это, как правило, буква  $M$ , но это может быть и любая другая буква); затем ставится двоеточие, а за ним пишется то условие, с помощью которого выделяется нужное нам множество точек.

Запишем теперь коротко все множества азбуки:

- А.  $\{M : |MA| = |MB|\}$ .
- Б.  $\{M : \rho(M, l_1) = \rho(M, l_2)\}$ .
- В.  $\{M : \rho(M, l) = h\}$ .
- Г.  $\{M : |MO| = r\}$ .
- Д.  $\{M : \angle AMB = \varphi\}$ .
- Е.  $\{M : |AM|^2 - |MB|^2 = c\}$ .
- Ж.  $\{M : |AM|^2 + |MB|^2 = c\}$ .
- И.  $\{M : |AM|/|MB| = k\}$ .
- К.  $\{M : \rho(M, l_1)/\rho(M, l_2) = k\}$ .
- Л.  $\{M : \rho(M, l_1) + \rho(M, l_2) = c\}$ .

Напомним, что все пункты азбуки, кроме Д, мы разбили на две группы

**А, Г, Е, Ж, И** и **Б, В, К, Л.**

Первая группа — это частные случаи множества

$$\{M : \lambda_1|MA_1|^2 + \lambda_2|MA_2|^2 + \dots + \lambda_n|MA_n|^2 = \mu\},$$

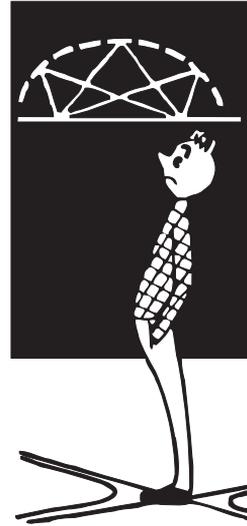
а вторая — частные случаи множества

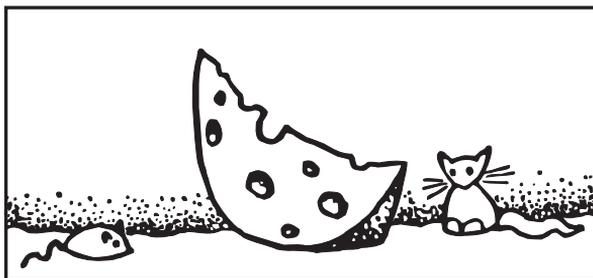
$$\{M : \lambda_1\rho(M, l_1) + \lambda_2\rho(M, l_2) + \dots + \lambda_n\rho(M, l_n) = \mu\}.$$

В § 6 мы дополним азбуку ещё четырьмя буквами

- М.  $\{M : |MA| + |MB| = c\}$ .
- Н.  $\{M : ||MA| - |MB|| = c\}$ .
- П.  $\{M : |MA| = \rho(M, l)\}$ .
- Р.  $\{M : |MA|/\rho(M, l) = c\}$ .

Эти множества — эллипсы, гиперболы и параболы, которые тоже естественно объединяются в одну группу — кривых второго порядка.





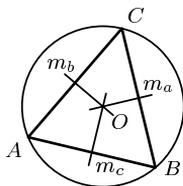
### § 3. Логические комбинации

Здесь собраны разнообразные задачи, в которых участвуют, как правило, сочетания нескольких геометрических условий. Решая эти задачи, мы научимся сортировать точки, представлять логические связи между условиями как операции над множествами.

**Через одну точку.** В первых задачах мы коснёмся традиционной темы геометрии — с помощью простых манипуляций множествами азбуки докажем теоремы о «замечательных точках» треугольника. Вся логика рассуждений будет сводиться, как правило, к использованию транзитивности равенства:

если  $a = b$  и  $b = c$ , то  $a = c$ .

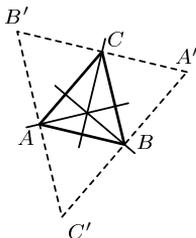
**3.1.** В треугольнике  $ABC$  медиатрисы (серединные перпендикуляры) сторон, пересекаются в одной точке (*центре описанной окружности треугольника*).



□ Медиатрисы  $m_c$  и  $m_a$  сторон  $AB$  и  $BC$ , очевидно, пересекаются в некоторой точке  $O$ . Поскольку точка  $O$  принадлежит медиатрисе  $m_c$ , то, согласно **A** (§ 2), имеет место равенство  $|OA| = |OB|$ . Точно так же из того, что  $O$  принадлежит медиатрисе  $m_a$ , вытекает, что  $|OB| = |OC|$ . Следовательно,  $|OA| = |OC|$  и тем самым точка  $O$  принадлежит медиатрисе  $m_b$  стороны  $AC$ .

В результате мы доказали, что все три медиатрисы пересекаются в точке  $O$ . □

**3.2.** Три высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке. (*Эта точка называется ортоцентром треугольника.*)



□ Проведём через каждую вершину треугольника прямую, параллельную противоположной этой вершине стороне. Эти прямые образуют новый треугольник  $A'B'C'$ , в котором точки  $A, B, C$  являются серединами сторон, а высоты треугольника  $ABC$  принадлежат медиатрисам сторон  $A'B', B'C', C'A'$ . Следовательно, согласно **3.1** они пересекаются в одной точке. □

Приведём второе доказательство **3.2**, похожее на доказательство утверждения **3.1**.

□ Представим каждую высоту как множество точек, удовлетворяющих некоторому условию. Воспользуемся для этого пунктом **Е** азбуки.

Мы знаем, что множество

$$\{M : |MA|^2 - |MB|^2 = d\}$$

— прямая, перпендикулярная прямой  $AB$ . Выберем  $d$  так, чтобы эта прямая содержала вершину  $C$ . Для этого нужно взять  $d = |CA|^2 - |CB|^2$ . Итак, прямая

$$h_c = \{M : |MA|^2 - |MB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2\}$$

содержит высоту треугольника, опущенную из вершины  $C$ .

Аналогично можно представить прямые, содержащие две другие высоты треугольника:

$$h_a = \{M : |MB|^2 - |MC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2\},$$

$$h_b = \{M : |MC|^2 - |MA|^2 = |BC|^2 - |BA|^2\}.$$

Пусть две первые прямые  $h_c$  и  $h_a$  пересекаются в точке  $H$ , тогда для неё одновременно выполняются равенства

$$|HA|^2 - |HB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2,$$

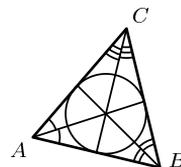
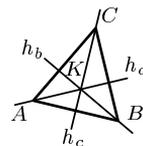
$$|HB|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2.$$

Складывая эти два равенства, получим

$$|HA|^2 - |HC|^2 = |BA|^2 - |BC|^2.$$

Значит, точка  $H$  принадлежит и третьей прямой  $h_b$ . □

**3.3.** Три биссектрисы треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке (*центре вписанной окружности треугольника*).



□ Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — прямые, которым принадлежат стороны треугольника. Биссектрисы  $l_a$  и  $l_b$  его углов  $A$  и  $B$ , очевидно, пересекаются в некоторой точке  $O$  (внутри треугольника). Для этой точки  $O$  выполняются равенства

$$\rho(O, b) = \rho(O, c) \quad \text{и}$$

$$\rho(O, a) = \rho(O, c).$$

Следовательно,  $\rho(O, b) = \rho(O, a)$  и точка  $O$  принадлежит биссектрисе  $l_c$  угла  $C$  треугольника. □

**З а м е ч а н и е.** Множество точек  $M$  плоскости, для которых  $\rho(M, c) = \rho(M, b)$  и  $\rho(M, a) = \rho(M, c)$  состоит из четырёх точек —  $O$ ,  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  — пересечения двух «крестов биссектрис». Рассуждая так же, как в решении **3.3**, мы получаем, что и третий «крест» (биссектрис прямых  $a$  и  $b$ ) проходит через эти точки.

Отсюда мы получаем, что шесть биссектрис внутренних и внешних углов треугольника пересекаются по три в четырёх точках. Одна из этих точек — центр вписанной окружности, а три другие — центры так называемых *внеписанных окружностей*.

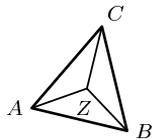
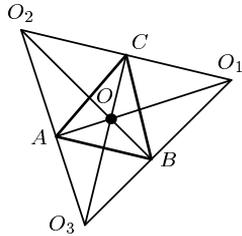
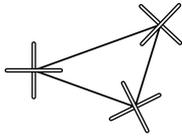
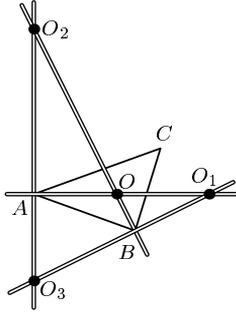
Заметим, что если в произвольном остроугольном треугольнике  $O_1O_2O_3$  точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — это основания высот, то  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  — центры внеписанных окружностей треугольника  $ABC$ . При этом высоты треугольника  $O_1O_2O_3$  служат биссектрисами треугольника  $ABC$ .

**3.4.** Медианы треугольника пересекаются в одной точке (*центре тяжести треугольника*).

Эту теорему можно доказать разными способами.

Первое доказательство, которое мы приведём, объясняет название «центр тяжести треугольника».

□ Поместим в вершинах треугольника  $ABC$  три груза  $\Gamma_A$ ,  $\Gamma_B$ ,  $\Gamma_C$  одинаковой массы, скажем 1 г, и найдём положение их центра тяжести. Центр тяжести двух грузов  $\Gamma_A$  и  $\Gamma_B$  лежит в середине отрезка  $AB$ ; значит, центр тяжести  $Z$  принадлежит соответствующей медиане. Точно так же можно показать, что  $Z$  принадлежит



двум другим медианам, следовательно, все три медианы пересекаются в точке  $Z$ .  $\square$

Приведём, однако, и здесь доказательство в духе трёх предыдущих.

$\square$  Пусть дан треугольник  $ABC$ . Точки медиан треугольника, проведённых из вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , удовлетворяют следующим условиям (соответственно) (см. **2.17**):

$$\begin{aligned} S_{AMB} &= S_{CMA}, \\ S_{AMB} &= S_{BMC}, \quad S_{BMC} = S_{CMA}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ясно, что из первых двух условий следует третье, а следовательно, медианы пересекаются в одной точке  $Z$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Множество точек, которые удовлетворяют условиям (1), это (согласно **2.17**) пары прямых — «кресты медиан». Таким образом, три таких множества пересекаются в четырёх точках:  $Z$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Заметим, что треугольник  $A'B'C'$  — это как раз тот треугольник  $A'B'C'$ , который мы рассмотрели в первом доказательстве теоремы о высотах **3.2**.

**3.5.** а) Доказать, что для любых трёх окружностей три радикальные оси каждой пары окружностей проходят через одну точку или параллельны (см. **2.9**).

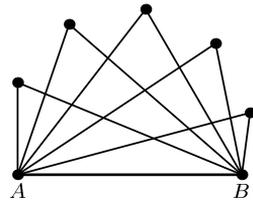
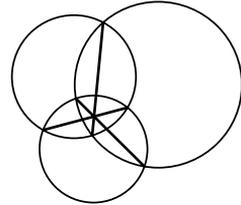
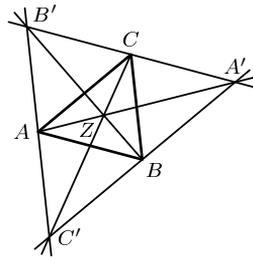
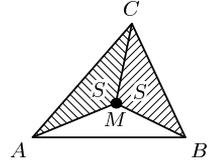
б) Доказать, что если три окружности попарно пересекаются, то три общие хорды каждой пары окружностей (или их продолжения) проходят через одну точку или параллельны.  $\downarrow$

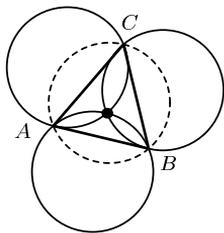
**3.6.** («Точка Торричелли».) Доказать, что в остроугольном треугольнике  $ABC$  существует точка  $T$  («точка Торричелли»), из которой все стороны видны под одним и тем же углом (т. е. такая точка, что  $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$ ).

**3.7.** Рассмотрим всевозможные треугольники с данным основанием  $AB$ , угол при вершине которых равен  $\varphi$ . Найти множество:

- а) точек пересечения медиан;
- б) точек пересечения биссектрис;  $\downarrow$
- в) точек пересечения высот.  $\downarrow$

**3.8.** а) Три попарно пересекающиеся прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , проходящие соответственно через три данные точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ . Доказать, что





в некоторый момент времени эти прямые проходят через одну точку. ↓

б) Доказать, что три окружности, симметричные описанной окружности треугольника  $ABC$  относительно прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , проходят через одну точку — ортоцентр треугольника  $ABC$ . ↓

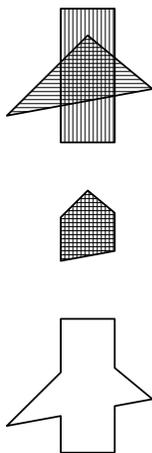
**3.9.** («Теорема Чевы».) На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника выбраны точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ . Доказать, что отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1. \quad \downarrow$$

**3.10.** Из точек  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ , лежащих соответственно на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  данного треугольника  $ABC$ , восставлены к этим сторонам перпендикуляры. Доказать, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$|AC_1|^2 + |BA_1|^2 + |CB_1|^2 = |AB_1|^2 + |BC_1|^2 + |CA_1|^2. \quad \downarrow$$

**Пересечение и объединение.** Выделим те основные операции, которыми мы постоянно пользуемся.



Пусть даны два или несколько множеств точек. *Пересечением* этих множеств называется множество всех точек, принадлежащих одновременно всем данным множествам. *Объединением* этих множеств называется множество всех точек, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств.

Если в задаче требовалось найти точки, удовлетворяющие одновременно нескольким условиям, то мы поступали так: находили множество точек, удовлетворяющих отдельно каждому условию, и брали пересечение этих множеств. С такой ситуацией мы встречаемся и в алгебраических задачах: множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$$

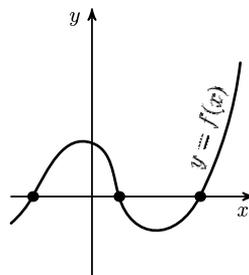
есть пересечение множеств решений отдельных уравнений, составляющих эту систему.

Если в задаче требуется найти точки, которые удовлетворяют хотя бы одному, из нескольких условий, то, разумеется, нужно найти множества точек, удовлетворяющих отдельно каждому из условий, и взять объединение этих множеств. Именно так мы поступаем при решении уравнения  $f(x) = 0$ , левая часть которого разлагается на множители

$$f(x) = f_1(x)f_2(x),$$

мы находим множество решений каждого из уравнений  $f_1(x) = 0$ ,  $f_2(x) = 0$  и берём их объединение.

Вызывает алгебраические ассоциации ещё одно понятие, с которым мы здесь встречаемся — *разбиение*. Чтобы решить неравенство  $f(x) > 0$  или  $f(x) < 0$ , обычно достаточно решить соответствующее уравнение  $f(x) = 0$ . Полученные точки разбивают область определения функции  $f$  (отрезок или прямую) на куски, в каждом из которых функция сохраняет знак. Точно так же множества точек плоскости, для которых выполнены те или иные неравенства, обычно представляют собой области, ограниченные линиями, на которых выполнены соответствующие равенства. Мы видели много простых примеров этому в § 2.



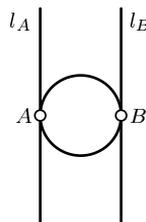
А в следующей задаче мы столкнёмся с более сложными разбиениями и комбинациями множеств.

**3.11.** Пусть даны две точки  $A$  и  $B$  на плоскости. Найти множество точек  $M$ , для которых треугольник  $AMB$

- а) прямоугольный;
- б) остроугольный;
- в) тупоугольный.

□ а) Треугольник  $AMB$  — прямоугольный, если выполняется одно из трёх условий: 1)  $\angle AMB = 90^\circ$ , 2)  $\angle BAM = 90^\circ$ , 3)  $\angle ABM = 90^\circ$ .

Искомое множество является поэтому объединением следующих трёх множеств: 1) окружность с диаметром  $AB$ ; 2) прямая  $l_A$ , проходящая через точку  $A$  и перпендикулярная отрезку



ку  $AB$ ; 3) прямая  $l_B$ , проходящая через точку  $B$  и перпендикулярная отрезку  $AB$ .

Из этого объединения нужно исключить точки  $A$  и  $B$ , лежащие на прямой  $AB$  (эти точки приводят к «вырожденному» треугольнику  $AMB$ ).  $\square$

$\square$  б) Треугольник  $AMB$  — остроугольный, если выполняются одновременно три условия: 1)  $\angle AMB < 90^\circ$ , 2)  $\angle BAM < 90^\circ$ , 3)  $\angle ABM < 90^\circ$ .

Искомое множество является поэтому пересечением следующих трёх множеств: 1) внешность круга с диаметром  $AB$  (см. § 2 Г); 2) полуплоскость без граничной прямой  $l_A$ , содержащая точку  $B$ ; 3) полуплоскость без граничной прямой  $l_B$ , содержащая точку  $A$ .

Их пересечение — полоса между прямыми  $l_A$  и  $l_B$ , из которой исключён круг с диаметром  $AB$ .  $\square$

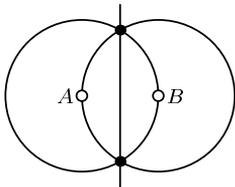
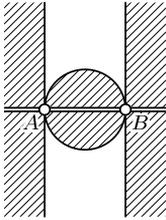
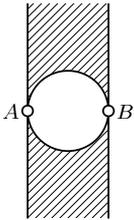
$\square$  в) Заметим, что каждая точка  $M$  плоскости (не лежащая на прямой  $AB$ ) удовлетворяет одному из трёх условий: либо а)  $\triangle AMB$  прямоугольный, либо б)  $\triangle AMB$  остроугольный, либо в)  $\triangle AMB$  тупоугольный, причём эти случаи взаимно исключают друг друга. Поэтому множеству в) должны принадлежать все те точки плоскости, которые не принадлежат ни а), ни б). Это множество — объединение круга и двух полуплоскостей (без прямых  $l_A, l_B$ ). В это множество не входит также прямая  $AB$ .  $\square$

**3.12.** На плоскости даны две точки  $A$  и  $B$ . Найти множество точек  $M$  таких, что:

- а) треугольник  $AMB$  равнобедренный;
- б) в треугольнике  $AMB$  сторона  $AB$  — наибольшая;
- в) в треугольнике  $AMB$  сторона  $AM$  — наибольшая.

**3.13.** На плоскости дан квадрат со стороной длины 1. Доказать, что если точка плоскости находится на расстоянии не больше 1 от каждой вершины этого квадрата, то она находится на расстоянии не меньше  $1/8$  от каждой стороны квадрата.

$\square$  Множество точек  $M$ , удалённых на расстояние не больше 1 от каждой из четырёх вер-



шин — пересечение четырёх кругов радиуса 1 с центрами в вершинах квадрата. Это — «четырёхугольник», ограниченный четырьмя дугами; его вершина находится от ближайшей стороны на расстоянии  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Проверим, что это число больше  $1/8$ :

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{8} > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{49}{16} > 3.$$

Теперь ясно, что все точки нашего множества удалены от сторон квадрата больше чем на  $1/8$ .  $\square$

**3.14.** Через точку  $O$  плоскости проведены три прямые, разбивающие эту плоскость на шесть конгруэнтных углов. Докажите, что если расстояние точки  $M$  до каждой прямой меньше 1, то расстояние  $|OM|$  меньше  $7/6$ .

**3.15.** Дан квадрат  $ABCD$ . Найти множество точек, которые ближе к прямой  $AB$ , чем к прямым  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ .

**3.16.** Дан треугольник  $ABC$ . Найти на плоскости множество точек  $M$  таких, что площадь каждого из треугольников  $AMB$ ,  $VMC$ ,  $CMA$  меньше площади треугольника  $ABC$ .

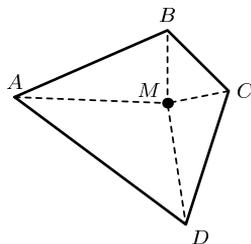
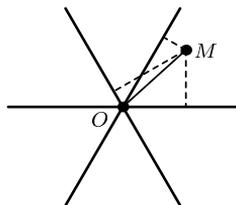
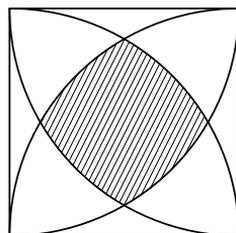
**3.17.** На сторонах произвольного выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  как на диаметрах построены круги. Доказать, что они покрывают весь четырёхугольник.

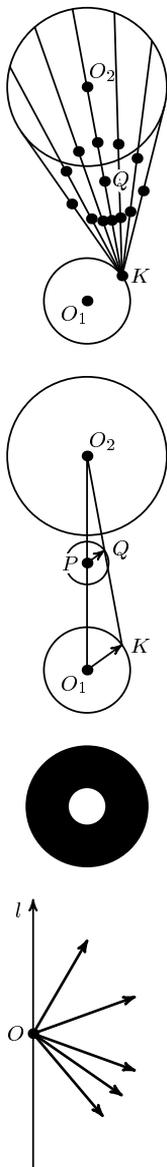
$\square$  Допустим, что внутри четырёхугольника существует точка  $M$ , лежащая вне кругов. Тогда, согласно § 2, Д, все углы  $AMB$ ,  $VMC$ ,  $CMD$  и  $DMA$  острые и их сумма меньше  $360^\circ$ , чего быть не может.  $\square$

**3.18\*.** Участок леса имеет форму выпуклого многоугольника площади  $S$  и периметра  $p$ . Доказать, что внутри леса можно указать точку, удалённую от опушки леса больше чем на  $S/p$ .

**3.19\*.** Внутри квадрата со стороной длины 1 расположено  $n$  точек. Доказать, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми меньше  $2/\sqrt{\pi n}$ .  $\downarrow$

В следующих задачах нам придётся рассматривать объединение бесконечного количества множеств.





**3.20.** а) Дана точка  $O$ . Рассмотрим семейство окружностей радиуса 3 см, центры которых находятся на расстоянии 5 см от точки  $O$ , и семейство окружностей радиуса 5 см, центры которых находятся на расстоянии 3 см от точки  $O$ . Доказать, что объединение окружностей первого семейства совпадает с объединением окружностей второго семейства.

б) Найти множество середин отрезков, у которых один конец лежит на одной данной окружности, а другой — на другой данной окружности.

□ б) Обозначим радиусы данных окружностей через  $r_1$  и  $r_2$  и их центры — через  $O_1$  и  $O_2$  соответственно. Зафиксируем сначала какую-нибудь точку  $K$  первой окружности и найдём множество середин отрезков, у которых один конец совпадает с точкой  $K$ . Очевидно, что это множество будет окружностью радиуса  $r_2/2$  с центром  $Q$  в середине отрезка  $KO_2$ . (Эта окружность получается гомотетией окружности  $(O_2, r_2)$  с коэффициентом  $1/2$  и центром  $K$ .) Заметим, что точка  $Q$  лежит на расстоянии  $r_1/2$  от точки  $P$  — середины отрезка  $O_1O_2$ .

Если мы будем двигать точку  $K$  по окружности  $(O_1, r_1)$ , то точка  $Q$  будет двигаться по окружности радиуса  $r_1/2$  с центром в точке  $P$ . Таким образом, искомое множество есть объединение всех окружностей радиуса  $r_2/2$ , центры которых лежат на окружности радиуса  $r_1/2$  с центром в точке  $P$ .

Каким получается это объединение бесконечного числа окружностей, видно по рисунку.

Тем самым множество всех точек, удовлетворяющих условию задачи, представляет собой кольцо с внешним радиусом  $(r_1 + r_2)/2$  и внутренним  $|r_1 - r_2|/2$ . В случае, когда  $r_1 = r_2$ , это множество превращается в круг. □

**3.21.** Из точки  $O$ , лежащей на прямой  $l$ , ограничивающей полуплоскость, внутрь этой полуплоскости проведено  $n$  векторов единичной длины. Докажите, что если  $n$  нечётно, то длина суммы этих векторов не меньше 1. ↓

**3.22.** Через деревню  $A$ , окружённую со всех сторон лугами, проходит одна прямолинейная

дорога. Человек может идти по дороге со скоростью 5 км/ч, по лугу — 2 км/ч. Начертить множество точек, до которых он мог бы прийти из  $A$  за один час.

### Задача про сыр.

**3.23.** Всегда ли квадратный кусок сыра с дырками можно разрезать на выпуклые кусочки так, чтобы в каждом кусочке была ровно одна дырка?

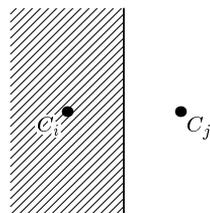
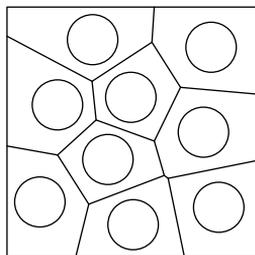
В математической формулировке эта задача выглядит так.

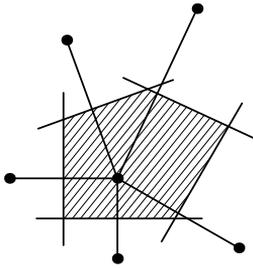
Внутри квадрата расположены несколько попарно не пересекающихся кругов. Можно ли разрезать этот квадрат на выпуклые многоугольники так, чтобы в каждом из них находился ровно один круг?

□ *Ответ* оказывается всегда положительным. Для любого примера с небольшим количеством кругов нетрудно разрезать квадрат на выпуклые многоугольники. Но, чтобы дать исчерпывающее доказательство, мы должны указать способ разбиения квадрата, который годился бы для любого количества и расположения кругов.

Рассмотрим сначала более простую задачу: будем считать, что радиусы всех кругов одинаковы. Можно предложить следующий способ разбиения квадрата. Сначала опишем его коротко, одной фразой. Присоединим к каждому кругу те точки квадрата, которые расположены ближе к этому кругу, чем ко всем остальным кругам; это и будут нужные выпуклые многоугольники (?).

Объясним это более подробно. Отметим центры  $C_1, C_2, \dots, C_n$  данных кругов. Пусть  $C_i$  — один из этих центров. Найдём множество точек, расстояние от которых до  $C_i$  не больше чем до остальных центров  $C_j$ . Множество точек плоскости, которые ближе к  $C_i$ , чем к  $C_j$  (для одного  $j$ ), — полуплоскость, ограниченная медиатрисой отрезка  $C_i C_j$  ( $A$ ). Нас интересуют точки, которые ближе к  $C_i$ , чем ко всем остальным центрам, т. е. точки, принадлежащие всем таким полуплоскостям, соответствующим различным  $C_j$  ( $j \neq i$ ). Множество всех этих точек —



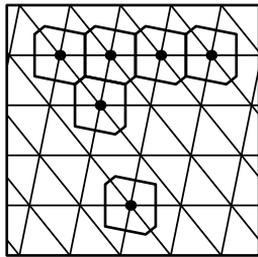


пересечение всех  $n - 1$  полуплоскостей — будет, очевидно, выпуклым многоугольником (?). Поскольку каждая полуплоскость содержит точку  $C_i$  и весь круг с центром  $C_i$  (ведь круги с центрами  $C_i$  и  $C_j$  не пересекаются и имеют равные радиусы!), то и пересечение содержит этот круг.

Такой многоугольник

$$\{M: |MC_i| \leq |MC_j| \text{ для всех } j \neq i\}$$

соответствует каждому центру  $C_i$ . Ясно, что эти многоугольники покрывают весь квадрат и не имеют общих внутренних точек: для того чтобы узнать, какому именно многоугольнику принадлежит точка  $M$ , достаточно ответить на вопрос «какой из центров  $C_i$  ближе всего к точке  $M$ ?». Если таких «ближайших к  $M$ » центров два или несколько, то  $M$  попадает на одну из медиатрис, т. е. на границу многоугольников — на линию разбиения. Таким образом, квадрат разбивается на выпуклые многоугольники, каждый из которых содержит ровно один круг.



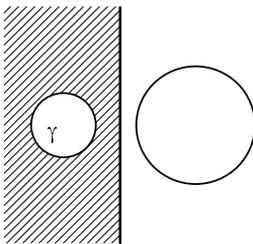
В качестве красивого примера рассмотрим случай, когда центры кругов расположены в узлах сетки, состоящей из одинаковых параллелограммов.

Наш способ разбиения можно просто описать следующим образом.

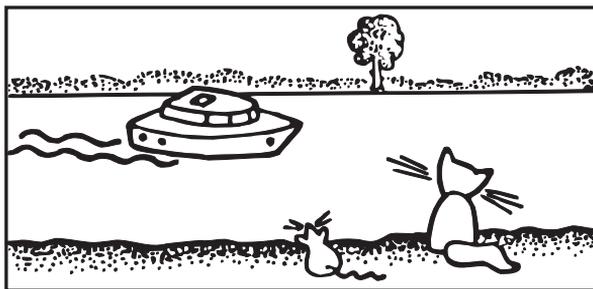
Во всех параллелограммах сетки проведём меньшие диагонали. В результате мы получим сетку с теми же узлами, состоящую из одинаковых остроугольных треугольников. Внутри каждого треугольника проведём медиатрису. Полученные шестиугольники образуют нужное разбиение квадрата.

Итак, мы разобрались в задаче **3.23** в случае, когда все круги имеют одинаковые радиусы.

В общем случае, когда радиусы кругов различны, можно разбить квадрат следующим образом. Из каждой точки, находящейся вне данных кругов, можно провести касательные ко всем окружностям. Множество, соответствующее данному кругу  $\gamma$ , будет состоять из точек круга  $\gamma$  и тех точек, для которых длина касательной к окружности  $\gamma$  меньше, чем к остальным окружностям. Это множество является пересечением нескольких полуплоскостей, содержащих круг  $\gamma$ ; краями этих полуплоскостей служат радикальные оси окружности  $\gamma$



и какой-нибудь из остальных окружностей (см. задачи **2.9** и **3.5**). Таким образом, весь квадрат будет представлен в виде объединения выпуклых многоугольников, не имеющих общих внутренних точек, и каждый многоугольник будет содержать свой круг.  $\square$

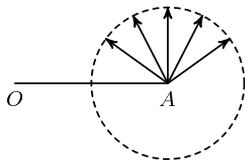
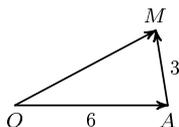
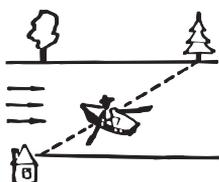


#### § 4. Минимум и максимум

Этот параграф начинается с совсем простых задач, в которых требуется найти, какое наибольшее или наименьшее значение может принимать та или иная величина, и заканчивается сложными исследовательскими задачами. Задачи на максимум и минимум можно, как правило, свести к исследованию некоторой функции, заданной аналитически. Но здесь мы собрали в основном такие задачи, где геометрические соображения позволяют быстрее достичь цели. Вы увидите, как при решении подобных задач используются различные множества точек.

**4.1.** Под каким углом к берегу нужно направить лодку, чтобы за время переправы через реку её как можно меньше снесло течением, если скорость течения — 6 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде — 3 км/ч?

□ *Ответ.* Под углом  $60^\circ$ .



Нам нужно направить лодку так, чтобы её абсолютная скорость (скорость относительно берегов) составляла возможно больший угол с берегом (?) (см. рисунок). Пусть вектор  $\vec{OA}$  — скорость течения реки,  $\vec{AM}$  — скорость лодки относительно воды. Сумма  $\vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM}$  даст нам абсолютную скорость лодки (скорость относительно берегов). Длина вектора  $\vec{AM}$  равна 3, и мы можем направить этот вектор в любую сторону. Множество возможных положений точки  $M$  — окружность радиуса 3 с центром в точке  $A$ . Ясно, что из всех векто-

ров  $\overrightarrow{OM}$  наибольший угол с берегом составляет  $\overrightarrow{OM_0}$ , направленный по касательной к окружности.

Мы получаем прямоугольный треугольник, у которого катет вдвое меньше гипотенузы. У такого треугольника угол равен  $60^\circ$ .  $\square$

**4.2.** Из треугольников с  $\angle A = \varphi$  и данным основанием  $BC$  выбрать треугольник с наибольшим радиусом вписанной окружности.

$\square$  Рассмотрим точки  $A$ , лежащие по одну сторону от прямой  $BC$ , для которых  $\angle BAC = \varphi$ . Множество центров окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$  — дуга окружности с концами  $B$  и  $C$  (см. 3.7, б). Очевидно, что наибольший радиус вписанной окружности будет у равнобедренного треугольника.  $\square$

**4.3.** Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине выбрать треугольник наибольшей площади.

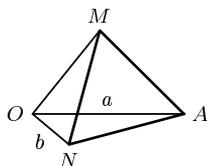
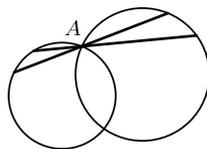
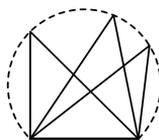
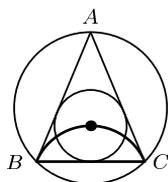
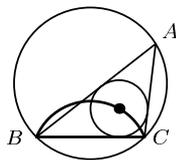
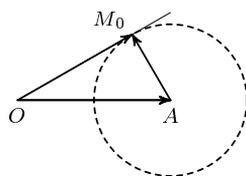
**4.4.** По двум взаимно перпендикулярным дорогам идут два пешехода, один — со скоростью  $u$ , другой — со скоростью  $v$ . Когда первый пересек дорогу второго, тому оставалось идти до пересечения ещё  $d$  километров. На каком наименьшем расстоянии будут находиться пешеходы?  $\downarrow$

**4.5.** Через деревню  $A$ , окружённую со всех сторон дугами, проходит одна прямая дорога. Человек может идти по дороге со скоростью 5 км/ч, по дуге — 2 км/ч (в любом направлении).

Какой маршрут должен выбрать человек, чтобы как можно быстрее попасть из деревни  $A$  к избушке  $B$ , находящейся на расстоянии 13 км от деревни и на расстоянии 5 км от дороги?

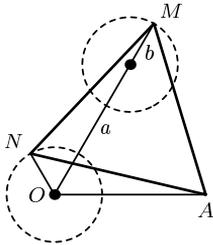
**4.6.** Даны две пересекающиеся окружности. Провести через точку  $A$  их пересечения прямую так, чтобы расстояние между точками её пересечения (отличными от  $A$ ) с окружностями было наибольшим.  $\downarrow$

**4.7.** На плоскости задана точка  $O$ . Требуется, чтобы одна вершина равностороннего треугольника находилась от точки  $O$  на рассто-



янии  $a$ , вторая — на расстоянии  $b$ . На каком наибольшем расстоянии от  $O$  может находиться третья его вершина?

□ *Ответ.*  $a + b$ . Пусть  $AMN$  — равносторонний треугольник, для которого  $|OA| = a$ ,  $|ON| = b$ . Чтобы ответить на вопрос, поставленный в задаче, можно рассматривать только треугольники с вершиной в фиксированной, закреплённой точке  $A$ : ведь при повороте треугольника, как жёсткого целого, вокруг точки  $O$  никакие расстояния не меняются. Итак, мы считаем, что точка  $A$  — фиксированная точка на расстоянии  $a$  от точки  $O$ , а  $N$  пробегает окружность радиуса  $b$  с центром  $O$ . Какое положение может занимать точка  $M$ ? Ответ уже найден в задаче 1.9:  $M$  лежит на окружности, полученной из данной поворотом на  $60^\circ$  вокруг точки  $A^1$ ). Центр  $O'$  повёрнутой окружности, очевидно, лежит на расстоянии  $a$  от точки  $O$  (ведь  $\triangle OO'A$  равносторонний). Радиус повёрнутой окружности, как и данной, равен  $b$ . Следовательно, наибольшее расстояние от  $O$  до третьей вершины  $M$  равно  $a + b$ . □



Из этой задачи вытекает такое любопытное следствие: расстояние от любой точки плоскости до одной вершины равностороннего треугольника не больше, чем сумма расстояний от неё до двух других вершин.

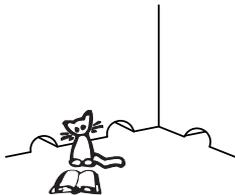
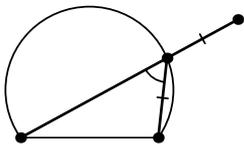
4.8. На каком наибольшем расстоянии от точки  $O$  может находиться вершина  $M$  квадрата  $AKMN$ , если известно, что

- а)  $|OA| = |ON| = 1$ ;
- б)  $|OA| = a$ ,  $|ON| = b$ .

4.9. Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине выбрать треугольник наибольшего периметра. ↓

Где поставить точку?

4.10. У мышки три выхода из норки в известных кошке точках  $A, B, C$ . Где должна сидеть кошка, чтобы расстояние от неё до самого далёкого из трёх выходов было как можно меньше?



<sup>1)</sup> Можно взять любую из окружностей, полученных поворотом по и против часовой стрелки, — они будут находиться на одинаковом расстоянии от  $O$ .

□ Рассмотрим круги одного и того же радиуса  $r$  с центрами в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Требуемая точка  $K$  — положение кошки — определяется так. Надо найти наименьший радиус  $r_0$ , при котором эти круги имеют общую точку — это есть нужная точка  $K$ . В самом деле, если  $M$  — другая точка, то она лежит вне одного из кругов, и поэтому её расстояние до одной из вершин больше  $r_0$ .

В случае остроугольного треугольника  $ABC$  точка  $K$  — это центр описанной окружности, а в случае прямоугольного или тупоугольного треугольника  $ABC$  точка  $K$  — середина наибольшей стороны. □

□ Точку  $K$  можно найти также следующим образом (?). Рассмотрим круг наименьшего радиуса, содержащий все три точки. Тогда точка  $K$  — его центр. □

Приведём ещё один подход к решению задачи 4.10.

□ Разобьём плоскость на три множества:

- a)  $\{M : |MA| \geq |MB| \text{ и } |MA| \geq |MC|\}$ ,
- b)  $\{M : |MB| \geq |MA| \text{ и } |MB| \geq |MC|\}$ ,
- c)  $\{M : |MC| \geq |MB| \text{ и } |MC| \geq |MA|\}$ .

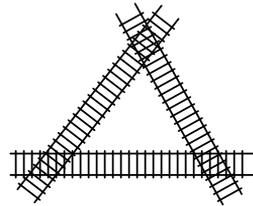
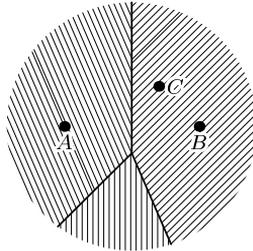
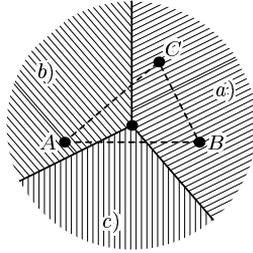
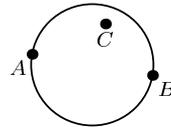
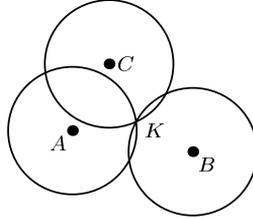
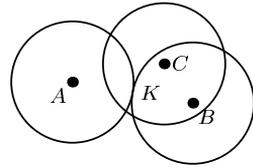
Это — три угла, стороны которых лежат на медиатрисах сторон треугольника  $ABC$ . Если кошка  $M$  находится в угле  $a$ ), то самой далёкой от неё вершиной будет  $A$ , если в угле  $b$ ) — то  $B$ , если в угле  $c$ ) — то  $C$ .

Если треугольник  $ABC$  остроугольный, то в каждом из трёх случаев кошке выгоднее всего сидеть в вершине соответствующего угла ( $a$ ),  $b$ ) или  $c$ )), т. е. она должна сидеть в центре описанной окружности.

Если треугольник  $ABC$  прямоугольный или тупоугольный, то, очевидно, кошке выгоднее всего сидеть в середине большей стороны треугольника. □

**4.11.** На участке леса, ограниченном тремя прямолинейными железными дорогами, живёт медведь. В какой точке леса он должен построить берлогу, чтобы расстояние от неё до ближайшей дороги было как можно больше?

**4.12\*.** а) В круглом озере обитают три крокодила. Где они должны сидеть, чтобы



наибольшее из расстояний от любой точки озера до ближайшего к ней крокодила было как можно меньше?

б) Та же задача для четырёх крокодилов.

**Задача про катер.**

**4.13\*.** На маленьком острове  $O$  стоит прожектор, луч которого освещает отрезок поверхности моря длины  $a = 1$  км. Прожектор равномерно вращается вокруг вертикальной оси, делая один оборот за промежуток времени  $T = 1$  мин. Катер, который может двигаться со скоростью  $v$ , должен незаметно (не попав в луч прожектора) подойти к острову. При каком наименьшем значении  $v$  это возможно?

□ Назовём круг радиуса  $a$ , который освещает прожектор, «кругом обнаружения». Ясно, что катеру выгоднее всего войти в этот круг в такой точке  $A$ , которую только что прошёл луч прожектора.

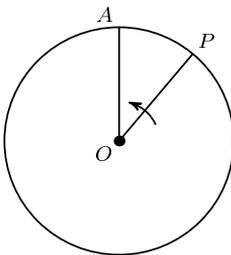
Если катер будет плыть по прямой к острову, он достигнет острова через время  $a/v$ ; чтобы луч прожектора его за это время не настиг, нужно, чтобы луч за это время не успел сделать полный оборот, т. е. чтобы выполнялось неравенство  $a/v < T$ , откуда

$$v > a/T = 60 \text{ км/ч.}$$

Таким образом, мы доказали, что при  $v > 60$  км/час катер сможет достичь острова незамеченным. Но, конечно, ниоткуда не следует, что 60 км/час — наименьшее значение скорости катера, при которой это возможно, т. е. что идти по отрезку  $AO$  — самое лучшее, что может выбрать капитан катера.

В действительности дело обстоит, как мы увидим, совсем не так<sup>1)</sup>.

Заметим, что линейные скорости, с которыми движутся разные точки луча  $OP$  прожектора, различны: чем ближе расположена точка к центру  $O$ , тем её скорость меньше. Угловая скорость луча равна  $2\pi/T$ . По окружности ради-



круг обнаружения

<sup>1)</sup> Прежде чем читать решение дальше, постарайтесь придумать какой-нибудь путь катера, по которому он может пробраться на остров при меньшем значении  $v$ .

уса  $r = vT/2\pi$  катер может спокойно двигаться перед лучом, так как скорость катера здесь равна линейной скорости соответствующей точки луча. Вне круга радиуса  $r$  с центром  $O$  скорость луча больше, а внутри этого круга (мы назовём его «кругом безопасности») скорость луча меньше  $v$ .

Если катеру удалось беспрепятственно добраться до какой-нибудь точки круга безопасности, дальше он заведомо сможет незаметно достичь острова. Один из возможных путей внутри круга безопасности — окружность радиуса  $r/2$ : если катер  $K$  будет двигаться по этой окружности со скоростью  $v$ , то отрезок  $KO$  будет вращаться вокруг  $O$  с той же угловой скоростью, с какой двигался бы катер по окружности радиуса  $r$ , т. е. с той же, что и луч прожектора (см. задачу 0.3), поэтому катер не будет настигнут этим лучом.

Таким образом, основная цель катера — достичь круга безопасности!

Если катер будет плыть до круга безопасности напрямик по радиусу  $AO$ , а дальше — перед лучом прожектора, то он сможет выполнить свою задачу при

$$v > \frac{1}{1 + 1/(2\pi)} \frac{a}{T} \approx 0,862 \frac{a}{T} = 51,7 \text{ км/ч.}$$

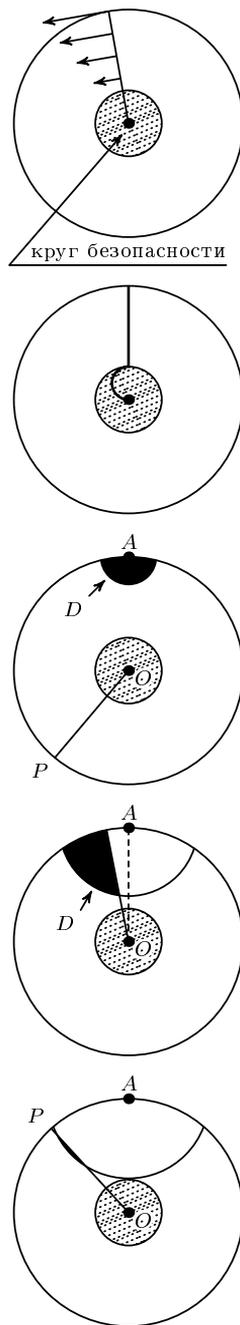
Мы сумели несколько улучшить нашу прежнюю оценку для скорости катера. Но, оказывается, и это ещё не предел!

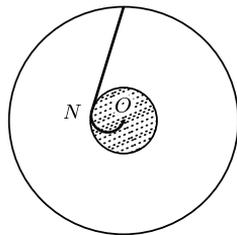
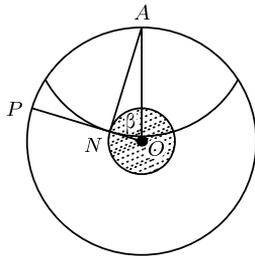
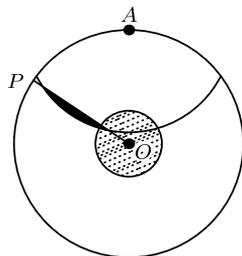
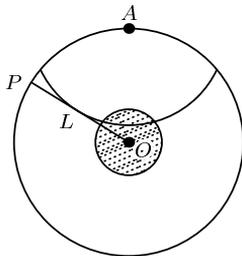
Найдём теперь наименьшее значение скорости  $v$ , при которой катер сможет незаметно подойти к острову.

Множество точек круга обнаружения, которых может достичь катер за время  $t$  — область, ограниченная дугой радиуса  $vt$  с центром в точке  $A$ . Среди этих точек те, в которые катер может попасть незамеченным, находятся слева от луча  $OP$ .

Обозначим множество этих «достижимых» точек через  $D$ . На рисунках показано, как меняется это множество с течением времени до тех пор, пока... Тут возможны два случая.

1) Если скорость  $v$  недостаточно велика, то в некоторый момент времени  $t$  множество  $D$ , не





дойдя до круга безопасности, совсем пропадёт: это будет означать, что за время  $t$  катер заведомо будет замечен, т. е. что при этом значении скорости катер не сможет пробраться к острову. Заметим, что в последний момент  $t = t_0$  луч  $OP$  касается дуги радиуса  $vt_0$  с центром  $A$  в некоторой точке  $L$ . Точка  $L$  расположена заведомо вне круга безопасности (иначе катер смог бы добраться до острова), причём чем больше скорость  $v$ , тем больше время обнаружения  $t_0$  и тем ближе к острову находится точка  $L$ .

2) Если скорость  $v$  больше некоторого значения  $v_0$ , то множество  $D$  в некоторый момент времени достигает круга безопасности. Это означает, что при  $v > v_0$  катер сможет пробраться на остров.

Минимальное значение скорости  $v_0$  соответствует, как нетрудно видеть, тому случаю, когда луч  $OP$  успевает коснуться дуги радиуса  $vt_0$  как раз в точке  $N$ , лежащей на окружности круга безопасности. Чтобы найти значение  $v_0$ , обозначим величину угла  $NOA$  через  $\beta$  и воспользуемся следующими равенствами:

$$|NO| = r = \frac{v_0 T}{2\pi}, \quad |AN| = v_0 t_0,$$

$$\frac{|AN|}{|NO|} = \operatorname{tg} \beta, \quad \frac{2\pi + \beta}{t_0} = \frac{2\pi}{T},$$

$$|NO| = a \cos \beta.$$

Из первого и последнего равенства находим, что

$$v_0 = (2\pi a \cos \beta) / T,$$

а из первых четырёх равенств получаем уравнение для  $\beta$ :

$$2\pi + \beta = \operatorname{tg} \beta.$$

Это уравнение можно решить только приближённо, например, с помощью таблиц;  $\beta$  получается примерно равным  $0,92\pi/2$ , откуда

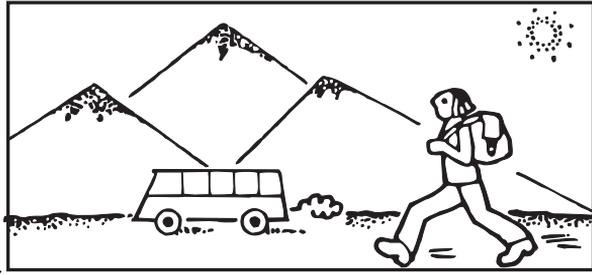
$$v_0 \approx 0,8a/T \approx 48 \text{ км/ч.}$$

При значении скорости, большем  $v_0$ , катер сможет достичь круга безопасности.  $\square$

**4.14\*.** а) Сын плавает в центре круглого бассейна. Отец, который стоит на краю бассейна, не умеет плавать, но бегаёт в четыре

раза быстрее, чем плавает сын. Сын бежит быстрее отца. Сын хочет убежать. Сможет ли он это сделать?

б) При каком отношении скоростей  $v$  и  $u$  ( $v$  — скорость, с которой плавает сын,  $u$  — скорость, с которой бежит отец) сын не сможет убежать?



## § 5. Линии уровня

В этом параграфе обсуждаются задачи и теоремы предыдущих параграфов, только в новой терминологии. Понятия, с которыми мы здесь познакомимся, — *функции на плоскости* и *их линии уровня* — особенно полезны при решении задач на минимум и максимум.

### Задача про автобус.

**5.1.** По прямолинейному шоссе едет экскурсионный автобус. В стороне от шоссе, под некоторым углом к нему, расположен дворец. В какой точке шоссе должен остановиться автобус, чтобы экскурсанты могли лучше всего рассмотреть из автобуса фасад дворца?

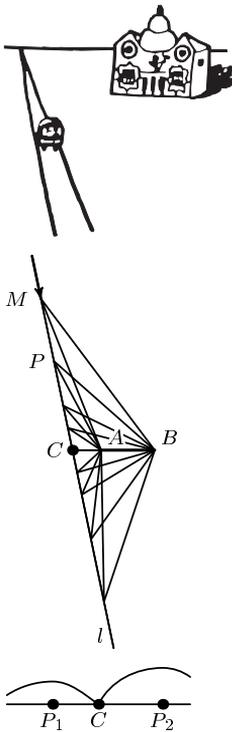
В математической постановке эта задача выглядит так.

Дана прямая  $l$  и не пересекающий её отрезок  $AB$ . Найти на прямой  $l$  такую точку  $P$ , для которой угол  $APB$  имеет наибольшую возможную величину.

Сначала посмотрим, как примерно изменяется угол  $AMB$ , когда точка  $M$  движется по прямой  $l$ . Другими словами: как ведёт себя функция  $f$ , которая каждой точке  $M$  прямой  $l$  ставит в соответствие величину угла  $AMB$ .

Легко приблизительно построить график этой функции. (Напомним, что график строится так: над каждой точкой  $M$  нашей прямой берётся точка на расстоянии, равном  $f(M) = \angle AMB$ .)

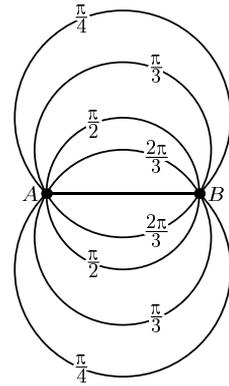
Можно решать задачу аналитически: ввести координаты на прямой  $l$ , выразить величину угла  $AMB$  через  $x$  — координату точки  $M$  —



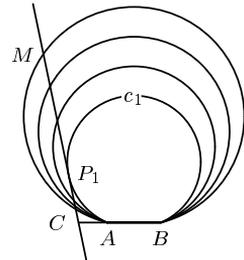
и найти при каком значении  $x$  полученная функция достигает максимума. Однако формула для  $f(x)$  получается довольно сложная.

Мы дадим более элементарное и более поучительное решение. Но для этого потребуется изучить, как зависит величина угла  $AMB$  от положения точки  $M$  на всей плоскости (а не только на прямой  $l$ ).

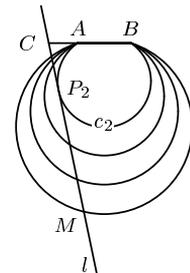
□ Множеством точек  $M$  плоскости, для которых угол  $AMB$  имеет заданную величину  $\varphi$ , является пара симметричных дуг с концами в точках  $A$  и  $B$  (см. § 2 Д). Если начертить эти дуги для различных значений  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi$ ), то получится семейство дуг, которые покрывают всю плоскость, за исключением прямой  $AB$ . На рисунке изображено несколько таких дуг, и на каждой написано, какому значению  $\varphi$  она соответствует. Например, значению  $\varphi = \pi/2$  соответствует окружность с диаметром  $AB$ .



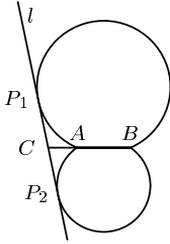
Будем теперь рассматривать только точки  $M$ , лежащие на прямой  $l$ . Нам нужно выбрать из них такую, для которой угол  $AMB$  имеет наибольшую величину. Через каждую точку проходит какая-нибудь одна дуга из нашего семейства: если  $\angle AMB = \varphi$ , то точка  $M$  лежит на дуге, соответствующей этому значению  $\varphi$ . Таким образом, задача сводится к тому, чтобы из всех дуг, задевающих прямую  $l$  выбрать ту, которая соответствует наибольшему значению  $\angle AMB = \varphi$ .



Рассмотрим часть прямой  $l$  по одну сторону от точки  $C$  пересечения прямой  $AB$  с  $l$ . (Мы не будем разбирать случай, когда отрезок  $AB$  параллелен прямой  $l$ . Рассмотрите этот случай сами.) Проведём дугу  $c_1$ , касающуюся этой части прямой, и докажем, что из точки касания  $P_1$  отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом. Действительно, любая точка  $M$  прямой  $l$ , отличная от  $P_1$ , лежит вне сегмента, стягиваемого дугой  $c_1$ . Как мы знаем (Д, стр. 26), отсюда следует, что  $\angle AMB < \angle AP_1B$ .



Ясно, что по другую сторону от точки  $C$  всё будет происходить точно также: точка  $P_2$ , из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим



углом, также является точкой касания прямой и одной из дуг нашего семейства.

Итак, мы доказали, что требуемая в задаче точка  $P$  совпадает с одной из точек  $P_1$  и  $P_2$ , в которых окружности, проходящие через точки  $A$  и  $B$ , касаются прямой  $l$ . В качестве  $P$  нужно выбрать ту из них, для которой угол  $PCA$  острый. Если же отрезок  $AB$  перпендикулярен к прямой  $l$ , то из соображений симметрии сразу видно, что точки  $P_1$  и  $P_2$  совершенно равноправны: так что требуемых в задаче точек в этом случае две. (Однако экскурсанты в любом случае должны выбрать ту из точек  $P_1$  и  $P_2$ , из которой виден фасад дворца.)

**Функции на плоскости.** Основная идея решения задачи 5.1 — исследовать на всей плоскости функцию  $f$ , которая каждой точке ставит в соответствие величину угла  $AMB$ , т. е.  $f(M) = \angle AMB$ .

В предыдущих параграфах мы по сути дела уже встречались с различными функциями. Помимо самых простых функций на плоскости, таких, как  $f(M) = |OM|$ ,  $f(M) = \rho(l, M)$ ,  $f(M) = \angle ABM$  (где  $O, A, B$  — данные точки, а  $l$  — данная прямая), мы изучали суммы, разности, отношения таких функций и другие их комбинации.

**Линии уровня.** Большую часть условий, которыми определялись множества точек, можно представить так. На плоскости (или на некоторой её области) задана функция  $f$ , и требуется найти множество точек  $M$ , в которых эта функция принимает заданное значение  $h$ , т. е.  $\{M : f(M) = h\}$ .

Как правило, для каждого фиксированного числа  $h$  это множество — некоторая линия; таким образом, плоскость расслаивается на линии, которые называются *линиями уровня* функции  $f$ . Так, решая задачу 5.1, мы рисовали линии уровня функции  $f(M) = \angle AMB$ .

**График функции.** Объясним теперь, откуда взялся термин «линия уровня». Дело в том, что для функций, заданных на плоскости, можно строить графики точно так же, как это делается для функций  $y = f(x)$ , заданных на пря-

мой, только теперь график нужно будет строить в пространстве. Будем считать, что плоскость, на которой задана наша функция  $f$ , горизонтальна, и для каждой точки  $M$  этой плоскости отметим точку, расположенную над точкой  $M$  на расстоянии  $|f(M)|$ , если  $f(M) > 0$ , и под точкой  $M$  на расстоянии  $|f(M)|$ , если  $f(M) < 0$ ; все отмеченные таким образом точки образуют обычно некоторую поверхность, которая и называется *графиком функции  $f$* . Другими словами, если ввести на горизонтальной плоскости систему координат  $Oxy$  и направить ось  $Oz$  вертикально вверх, то графиком функции будет множество точек с координатами  $(x; y; z)$ , где  $z = f(M)$ , а  $(x; y)$  — координаты точки  $M$  на плоскости. (Если функция определена не во всех точках плоскости, а только в некоторой области, то график будет расположен только над точками этой области определения.)

Так вот, линия уровня  $\{M : f(M) = h\}$  состоит, очевидно, из тех точек  $M$ , над которыми точки графика расположены «на одном уровне» — на высоте  $h$ .

На развороте (стр. 62–63) мы изображили графики функций, линиями уровня которых являются множества азбуки. Так, мы видим, что график функции  $f(M) = \angle AMB$  представляет собой «горный хребет» высотой  $\pi$  над отрезком  $AB$ , с которого график плавно опускается до нуля. (Напомним, что в самом начале решения задачи 5.1 мы строили график этой функции, но только над некоторой прямой  $l$ .)

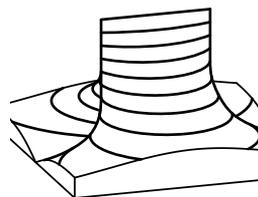
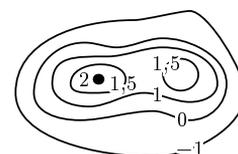
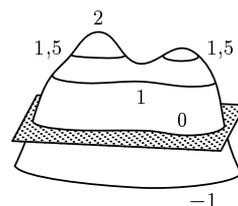
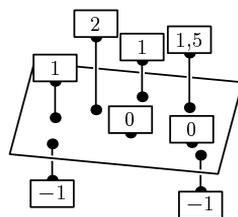
Функция  $f$  вида

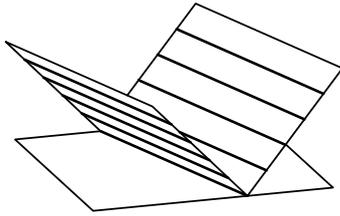
$$f(M) = \lambda_1 \rho(M, l_1) + \lambda_2 \rho(M, l_2) + \dots + \lambda_n \rho(M, l_n),$$

как мы говорили в § 2 (теорема о расстояниях до прямых), в каждом из кусков  $Q$ , на которые прямые  $l_1, l_2, \dots, l_n$  делят плоскость, записывается линейным выражением

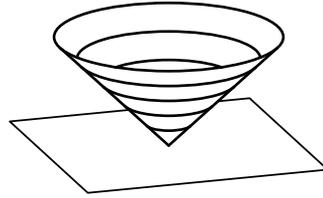
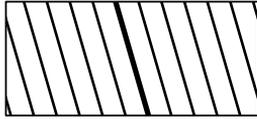
$$f(x, y) = ax + by + c.$$

Таким образом, её график будет состоять из кусков плоскостей — наклонных или (если  $a = b = 0$ ) горизонтальных. Это мы видим на примерах множеств из пунктов **В**, **К**, **Л** азбуки.

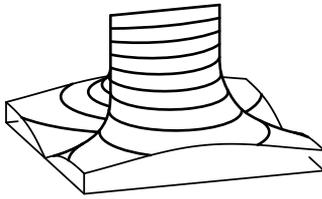
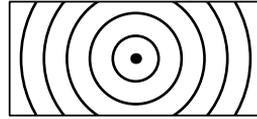




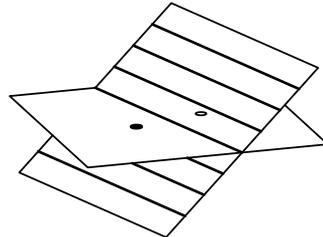
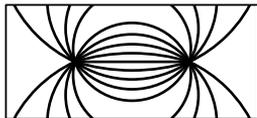
**В**



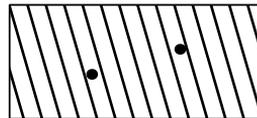
**Г**



**Д**



**Е**



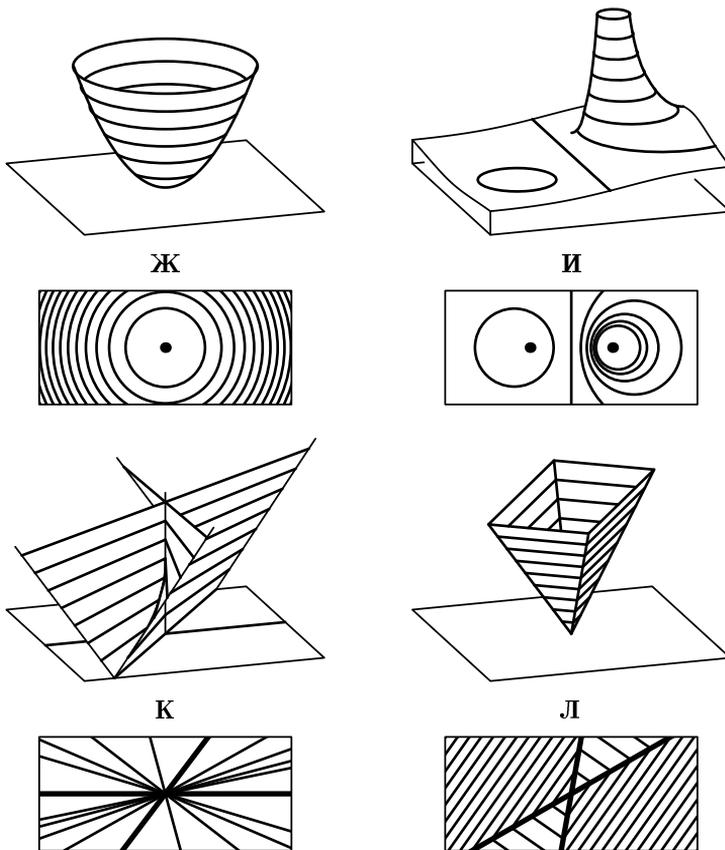
Здесь нарисованы графики функций, соответствующих пунктам азбуки, и под каждым из них — карта линий уровня.

**В.**  $f(M) = \rho(M, l)$ . График — двугранный угол, линии уровня — пары параллельных прямых.

**Г.**  $f(M) = |MO|$ . График — конус, линии уровня — concentric circles.

**Д.**  $f(M) = \angle AMB$ . График — гора с вершиной в форме горизонтального отрезка, у концов которого — вертикальные обрывы.

**Е.**  $f(M) = |MA|^2 - |MB|^2$ . График — плоскость, линии уровня — параллельные прямые.



**Ж.**  $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$ . График — параболоид вращения, линии уровня — concentric circles.

**И.**  $f(M) = |MA|/|MB|$ . График имеет около точки  $A$  впадину, около  $B$  — поднимается к бесконечности. Линии уровня — непересекающиеся окружности, центры которых лежат на прямой  $AB$ , причём каждые две из них имеют радикальной осью одну и ту же прямую — медиатрису отрезка  $AB$ .

**К.**  $f(M) = \rho(M, l_1)/\rho(M, l_2)$ . График получается следующим образом: рассматривается седлообразная поверхность — «гиперболический параболоид», — проходящая через прямую  $l_1$  и вертикальную прямую, проходящую через точку  $O$  пересечения  $l_1$  и  $l_2$ ; часть этой поверхности, лежащая ниже данной плоскости, отражается симметрично относительно неё. Линии уровня — пары прямых, проходящих через точку  $O$ .

**Л.**  $f(M) = \rho(M, l_1) + \rho(M, l_2)$ . График — четырёхгранный угол. Линии уровня — прямоугольники с диагоналями, принадлежащими  $l_1$  и  $l_2$ .

Линии уровня такой функции состоят из кусков прямых; а если у графика есть горизонтальная площадка — некоторая линия уровня содержит целый кусок  $Q$  плоскости.

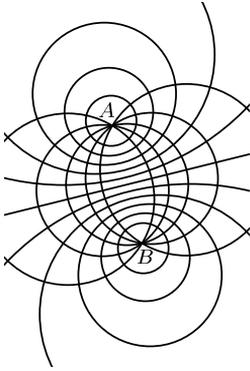
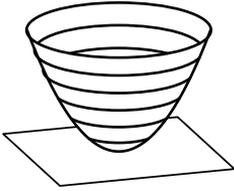
Функция  $f$  вида

$$f(M) = \lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_2|^2 + \dots + \lambda_n |MA_n|^2$$

при  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$  тоже сводится к линейной функции на всей плоскости (пример — **Е**), а в общем случае при  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \neq 0$  — к функции вида

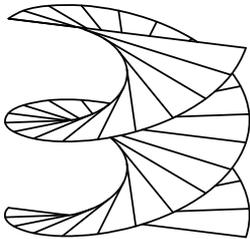
$$f(M) = d|MA|^2,$$

где  $A$  — некоторая точка плоскости. Линии её уровня — окружности (теорема о квадратах расстояний из § 2), а график — поверхность *параболоида вращения*.



Пожалуй, наиболее сложные графики в нашей азбуке имеют функции  $f(M) = \angle AMB$  и  $f(M) = |AM|/|BM|$ . Заметим, что между картами линий уровня этих функций имеется интересная связь: если нарисовать их на одном чертеже, то получится два семейства окружностей, причём любая окружность одного семейства пересекает любую окружность другого семейства под прямым углом (?) — как говорят, эти семейства взаимно *ортогональны*.

Приведём ещё один пример простой функции, у которой линии уровня — лучи, выходящие из одной точки, а график — довольно сложная поверхность. Эта функция  $f(M) = \angle MAB$  ( $A$  и  $B$  — данные точки плоскости). Её график над каждой из полуплоскостей, на которые прямая  $AB$  делит плоскость, — *винтовая поверхность*, или *геликоид*.



**Карта функции.** Как мы видим, для многих функций довольно трудно нарисовать их пространственный график. Как правило, более удобный способ представить себе поведение функции на плоскости — это нарисовать карту её линий уровня.

Физические географические карты составляются следующим образом. Пусть  $f(M)$  — высота в точке  $M$  поверхности над уровнем моря. Тогда рисуются линии уровня  $\{M : f(M) = 200 \text{ м}\}$ ,  $\{M : f(M) = 400 \text{ м}\}$  и т. д. Области

между этими линиями уровня раскрашиваются в разные цвета:

- $\{M : 0 < f(M) < 200 \text{ м}\}$  — зелёного цвета,
- $\{M : f(M) > 200 \text{ м}\}$  — коричневого,
- $\{M : f(M) < 0\}$  — голубого цвета разных оттенков.

Для того чтобы составить карту функции, нужно нарисовать несколько её линий уровня — достаточно много, чтобы по ним можно было судить о том, как расположены остальные, — и написать на каждой из них, какому значению функции (какому  $h$ ) она соответствует.

Если условиться наносить линии уровня через одинаковые по величине интервалы значений функции  $0, \pm d, \pm 2d, \dots$ , то по густоте линий уровня можно судить о крутизне графика: линии расположены чаще там, где больше наклон графика к горизонтальной плоскости.

**Линии раздела.** При решении задачи 3.23 (про сыр) мы рассматривали довольно сложную функцию

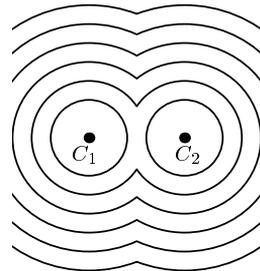
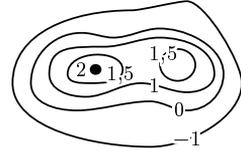
$$f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, \dots, |MC_n|\},$$

которая сопоставляет каждой точке  $M$  плоскости наименьшее из расстояний от неё до данных точек  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . В решении задачи 3.23 нам, собственно говоря, нужна была не столько эта функция, сколько связанные с ней линии раздела плоскости на многоугольные области. Попробуем представить себе карту и график этой функции. Начнём с самых простых случаев  $n = 2$  и  $n = 3$ .

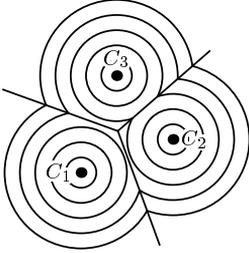
**5.2.** а) На плоскости заданы две точки  $C_1$  и  $C_2$ . Нарисовать карту линий уровня функции  $f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|\}$ .

б) На плоскости даны три точки  $C_1, C_2$  и  $C_3$ . Нарисовать карту линий уровня функции  $f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, |MC_3|\}$ .

□ а) Рассмотрим множество точек  $M$ , для которых  $|MC_1| = |MC_2|$ . Это, как мы знаем, медиатриса отрезка  $C_1C_2$ . Медиатриса разбивает плоскость на две полуплоскости, точки одной из них расположены ближе к  $C_1$ , а точки другой — ближе к  $C_2$ .



Таким образом, в одной полуплоскости  $f(M) = |MC_1|$ , а в другой  $f(M) = |MC_2|$ . Следовательно, надо нарисовать в первой полуплоскости линии уровня функции  $f(M) = |MC_1|$  — окружности, и симметрично отразить эту карту относительно медиатрисы.

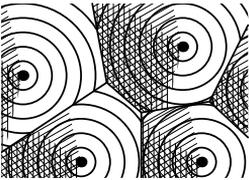


б) Рассмотрим множества точек, где  $|MC_1| = |MC_2|$ , где  $|MC_2| = |MC_3|$  и где  $|MC_1| = |MC_3|$ . Мы рассмотрели их в задаче 3.1 — это три медиатрисы треугольника  $C_1C_2C_3$ , пересекающиеся в одной точке  $O$ . Три луча этих медиатрис с началом в точке  $O$  разбивают плоскость на три области. Очевидно, в области точки  $C_1$  —  $f(M) = |MC_1|$ , в области точки  $C_2$  —  $f(M) = |MC_2|$ , в области точки  $C_3$  —  $f(M) = |MC_3|$ . Таким образом, карта функции  $f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, |MC_3|\}$  представляет собой объединение трёх карт, склеенных по линии раздела — трём лучам.  $\square$

График функции

$$f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, \dots, |MC_n|\}$$

можно представить себе таким образом. Если насыпать в ящик ровным слоем песок и в точках  $C_1, C_2, \dots, C_n$  пробить в дне ящика отверстия, через которые песок высыпется, — так, что вокруг каждого отверстия образуется «воронка», — то поверхность всех этих воронок и образует график функции  $f$ . (Разумеется, нужно взять песок такого качества, чтобы угол естественного откоса равнялся  $45^\circ$ , и насыпать его достаточно толстым слоем.)



Обратимся теперь к задачам 3.11 и 3.12.

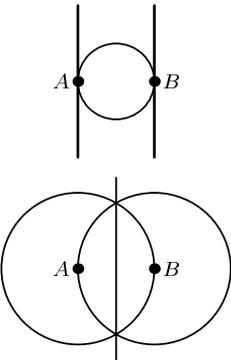
В их условиях также можно увидеть некоторые функции на плоскости.

**5.3.** Пусть заданы точки  $A$  и  $B$  на плоскости. Нарисовать карту линий уровня функций

а)  $f(M) = \max\{\angle AMB, \angle BAM, \angle MBA\}$ ,

б)  $f(M) = \min\{|AM|, |MB|, |AB|\}$

и описать их графики.



**Экстремумы функции.** Пусть  $f$  — данная функция на плоскости. Представим себе её график как холмистую местность. Максимальные значения  $f(M)$  соответствуют высоте горных

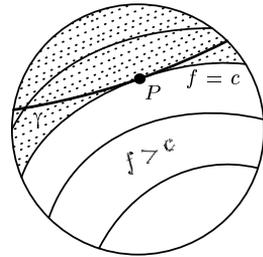
вершин её графика, а минимальные — глубине впадин.

На карте линий уровня функции, как правило, вершины гор и впадины окружены линиями уровня. Например, для функции  $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$  точкой минимума  $M_0$  является середина отрезка  $AB$ , а линии уровня — концентрические окружности с центром в точке  $M_0$ .

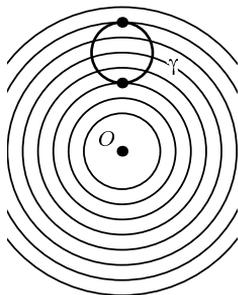
Более сложная картина получается для функции  $f(M) = \angle AMB$ . Эта функция достигает своего максимального значения  $\pi$  во всех точках отрезка  $AB$ , а минимального значения  $0$  — в остальных точках прямой  $AB$ . Переход от максимального значения к минимальному в точках  $A$  и  $B$  не плавный (в этих точках  $f$  не определена): здесь график имеет вертикальные обрывы.

В начале параграфа мы использовали карту линий уровня для решения задачи 5.1. Это — тоже задача на отыскание максимума, но другого типа. В общем виде задача формулируется так: *найти, какое наибольшее или наименьшее значение функция  $f$ , заданная на плоскости, принимает на некоторой кривой  $\gamma$*  (в рассмотренной задаче  $\gamma$  была прямой). Наблюдение, которое мы сделали в задаче 5.1, относится и к другим подобным задачам: как правило, *наибольшее (и наименьшее) значение будет достигаться в тех точках, где  $\gamma$  касается линии уровня функции  $f$ <sup>1)</sup>*.

Пусть, скажем, максимальное значение функции  $f$  на кривой  $\gamma$  достигается в точке  $P$  и равно  $f(P) = c$ . Тогда кривая  $\gamma$  не может заходить в область  $\{M: f(M) > c\}$  — она должна целиком принадлежать дополнительной области  $\{M: f(M) \leq c\}$ , причём точка  $P$  лежит на линии раздела между этими областями: на линии уровня  $\{M: f(M) = c\}$ . Таким образом, кривая  $\gamma$  не может перейти через линию уровня  $\{M: f(M) = c\}$ , т. е. должна коснуться этой линии в точке  $P$ .



<sup>1)</sup> Или в точке, где сама функция  $f$  достигает максимума, если кривая  $\gamma$  проходит через такую точку.



Вы видели, как этот принцип «касания» для нахождения экстремума проявляется в задачах § 4. В этих задачах мы искали максимум или минимум простых функций

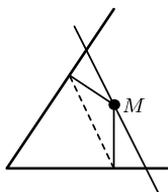
$$f(M) = \rho(M, l),$$

$$f(M) = \angle MOA,$$

$$f(M) = |MA|$$

на данной кривой  $\gamma$ . Линия уровня, соответствующая экстремальному значению, касалась  $\gamma$ . Как правило, этой кривой  $\gamma$  была окружность. К отысканию максимума (или минимума) функции на данной окружности или прямой сводятся также некоторые из следующих задач.

**5.4.** а) На гипотенузе данного прямоугольного треугольника найти точку, для которой расстояние между её проекциями на катеты наименьшее.



б)\* На данной прямой найти точку  $M$  такую, чтобы расстояние между её проекциями на стороны данного угла было наименьшим. ↓

**5.5.** Дана окружность с центром  $O$  и точка  $A$  внутри неё. Найти на окружности точку  $M$ , для которой величина угла  $AMO$  наименьшая.

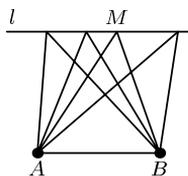
**5.6.**  $A$  и  $B$  — данные точки. Найти на данной окружности  $\gamma$  точку  $M$ ,

а) сумма квадратов расстояний,

б) разность квадратов расстояний

от которой до точек  $A$  и  $B$  минимальна.

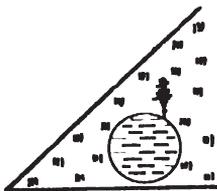
**5.7.** Дана прямая  $l$  и параллельный ей отрезок  $AB$ . Найти положения точки  $M$  на прямой  $l$ , в которых величина  $|AM|/|MB|$  принимает наибольшее и наименьшее значения. ↓



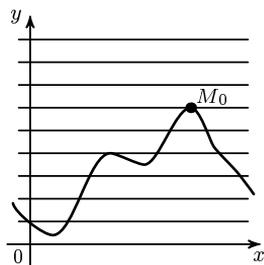
**5.8.** Между двумя прямыми дорогами расположено озеро. Где на берегу озера нужно выстроить санаторий, чтобы сумма расстояний от него до этих двух дорог была наименьшей? Рассмотрите случаи, когда озеро имеет форму

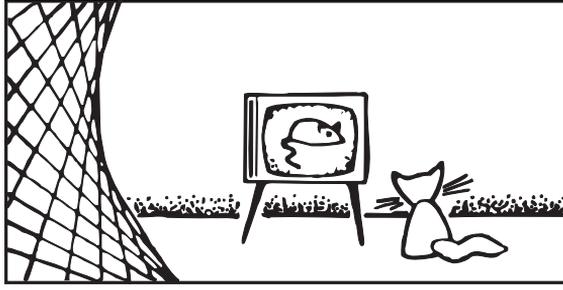
а) круга,

б) прямоугольника.



Заметим, что и для нахождения максимума функции  $y = f(x)$  одного переменного мы руководствуемся «принципом касания». Пусть на плоскости нарисован график функции  $f$  — некоторая кривая. Найти максимум функции  $f$  — это значит найти самую верхнюю точку графика. Ясно, что для этого надо провести прямую, касательную к графику и параллельную оси  $Ox$ , причём провести так, чтобы весь график лежал ниже этой прямой.





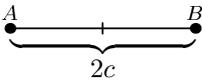
## § 6. Кривые второго порядка

**Эллипсы, гиперболы, параболы.** До сих пор мы ограничивались небогатым набором линий, подробно изучаемых в школе: прямыми и окружностями. К ним сводились все пункты нашей азбуки от **А** до **Л**. В этом параграфе мы познакомимся с некоторыми другими кривыми: эллипсами, гиперболами и параболой. Эти кривые называются вместе «коническими сечениями», потому что их можно получить в пересечении плоскости с поверхностью конуса, как показано на рисунке на стр. 78.

У нас эллипсы, гиперболы и параболы сначала будут определены геометрически, как продолжение «азбуки» из § 2. Далее они выступают как огибающие некоторых семейств прямых. И в конце, используя метод координат, мы увидим, что эти кривые задаются алгебраическими уравнениями второй степени. Доказательство эквивалентности этих определений не просто. Однако все они полезны — каждое новое определение даёт возможность с меньшими трудностями решать новый класс задач.

Итак, продолжим азбуку новыми буквами **М**, **Н**, **П** и немного погодя — **Р**.

**М.** Эллипс. Рассмотрим множество точек  $M$  плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек  $A$  и  $B$  равна постоянной величине.



Обозначим эту постоянную величину (как принято) через  $2a$ , а расстояние  $|AB|$  между точками  $A$  и  $B$  — через  $2c$ . Заметим, что при

$a \leq c$  это множество малоинтересно: если  $a < c$ , то искомое множество пусто, так как на плоскости нет ни одной точки  $M$ , для которой  $|AM| + |MB| < |AB|$ ; при  $a = c$  множество представляет собой отрезок  $AB$ .

Чтобы увидеть, что будет при  $a > c$ , поступим так. Вобьём в точках  $A$  и  $B$  два гвоздя, наденем на них кольцо из нитки длины  $2(a + c)$ , натянем нитку карандашом и проведём линию, держа карандашом нитку всё время натянутой. Получится некоторая замкнутая кривая. Эта кривая называется *эллипсом*. Точки  $A$  и  $B$  называются *фокусами* эллипса. Из определения эллипса ясно, что у него две оси симметрии: прямая  $AB$  и перпендикулярная к ней прямая, проходящая через середину  $O$  отрезка  $AB$ . Отрезки этих двух прямых, лежащие внутри эллипса, называются его *осями*, а точка  $O$  — его *центром*.

Меняя длину нити, мы начертим целое семейство эллипсов с данными фокусами, иными словами — карту линий уровня функции

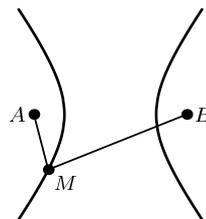
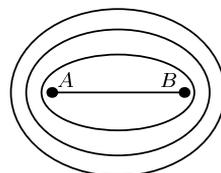
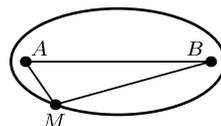
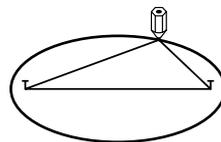
$$f(M) = |MA| + |MB|.$$

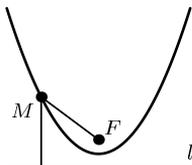
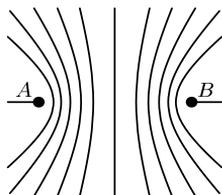
**Н.** Гипербола. Рассмотрим *множество точек, разность расстояний от которых до двух данных точек  $A$  и  $B$  равна (по модулю) постоянной величине  $2a$  ( $a > 0$ )*.

Пусть по-прежнему  $|AB| = 2c$ . Если  $a > c$ , то множество **Н** пусто, так как на плоскости нет ни одной точки  $M$ , для которой  $|AM| - |MB| > |AB|$  или  $|MB| - |MA| > |AB|$ ; при  $a = c$  множество **Н** представляет собой два луча прямой  $AB$  — нужно из прямой ( $AB$ ) исключить отрезок  $[AB]$ .

В случае  $a < c$  множество **Н** состоит из двух линий (ветвей), изображённых на рисунке (одна — множество  $\{M : |MA| - |MB| = 2a\}$ , а другая —  $\{M : |MB| - |MA| = 2a\}$ ). Это множество называется *гиперболой*, а точки  $A$  и  $B$  — её *фокусами*.

Из определения множества **Н** ясно, что у гиперболы две оси симметрии. Середина  $O$  отрезка  $AB$  называется *центром* гиперболы.





Чтобы получить всю карту линий уровня функции

$$f(M) = ||MA| - |MB||,$$

нужно ещё к семейству гипербол с фокусами  $A$  и  $B$  добавить медиатрису отрезка  $AB$  (она соответствует значению  $f(M) = 0$ ).

**П.** Парабола. Множество точек  $M$ , одинаково удалённых от данной точки  $F$  и данной прямой  $l$ , называется параболой.

Точка  $F$  называется её *фокусом*, а прямая  $l$  — *директрисой* (директриса в точном переводе означает «направляющая»).

Парабола имеет одну ось симметрии, которая проходит через фокус  $F$  и перпендикулярна директрисе.

Подведём первые итоги. Мы дополнили азбуку такими множествами:

**М.**  $\{M : |MA| + |MB| = 2a\}$ .

**Н.**  $\{M : ||MA| - |MB|| = 2a\}$ .

**П.**  $\{M : |MF| = \rho(M, l)\}$ .

Теперь мы знаем, что если задача сводится к одному из множеств **П**, **М** и **Н**, то ответом будет парабола, эллипс или гипербола. Разумеется, в ответе нужно указать не только название, но и определить размеры фигуры, её расположение, — например, указать фокусы и число  $a$ .

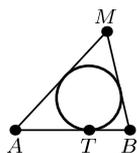
**6.1.** На плоскости даны точки  $A$  и  $B$ . Найти множество точек  $M$ , для которых:

- а) периметр треугольника  $AMB$  равен постоянной величине  $p$ ;
- б) периметр треугольника  $AMB$  не больше  $p$ ;
- в) разность  $|MA| - |MB|$  не меньше  $d$ .

**6.2.** Даны отрезок  $AB$  и точка  $T$  на нём. Найти множество точек  $M$ , для которых окружность, вписанная в треугольник  $AMB$ , касается стороны  $AB$  в точке  $T$ .

**6.3.** Найти множество центров окружностей, касающихся

- а) данной прямой и проходящих через данную точку;
- б) данной окружности и проходящих через данную точку внутри окружности;



в) данной окружности и проходящих через данную точку вне окружности;

г) данной окружности и данной прямой;

д)\* двух данных окружностей. ↓

**6.4.** У шарнирной замкнутой ломаной  $ABCD$ , у которой  $|AD| = |BC| = a$  и  $|AB| = |CD| = b$ , звено  $AD$  закреплено.

Найти множество точек пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ ,

а) если  $a < b$ ;

б) если  $a > b$ .

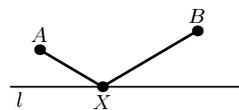
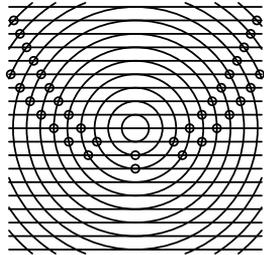
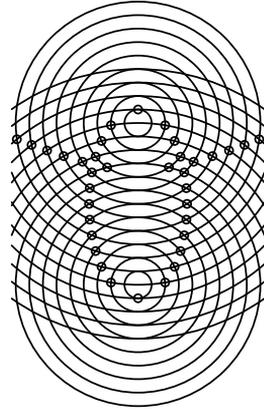
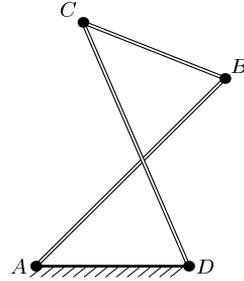
**6.5.** а) На плоскости заданы две точки  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми — целое число  $n$  (на рисунке  $n = 12$ ). Проведены все окружности целочисленных радиусов с центрами  $A$  и  $B$ . На полученной сетке отмечена последовательность узлов (точек пересечения окружностей), в которой каждые два соседних узла — противоположные вершины криволинейного четырёхугольника. Доказать, что все точки этой последовательности лежат либо на одном эллипсе, либо на одной гиперболе.

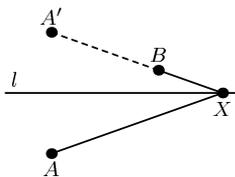
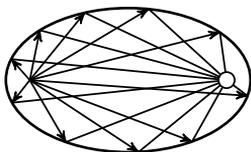
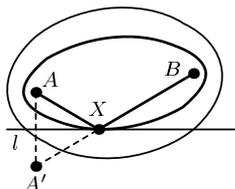
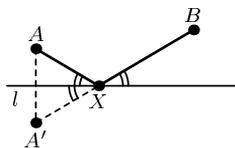
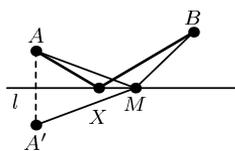
б) На плоскости задана прямая  $l$  и на ней — точка  $F$ . Проведены все окружности целочисленных радиусов с центром  $F$  и все прямые, параллельные  $l$  и находящиеся от  $l$  на целочисленном расстоянии. Доказать, что все точки последовательности узлов сетки, построенной так же, как в задаче а), лежат на одной параболы с фокусом  $F$ .

Поверхности, получаемые вращением в пространстве параболы, эллипса и гиперболы вокруг осей симметрии, называются соответственно *параболоидом*, *эллипсоидом* и *гиперболоидом вращения*.

**Фокусы и касательные.** Много интересных задач про эллипсы, гиперболы и параболы связаны со свойствами касательных к этим кривым. Основное свойство касательных к эллипсу мы получим, сопоставив два решения следующей простой задачи на построение.

**6.6.** Дана прямая  $l$  и две точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от неё. Найти на прямой  $l$  такую точку  $X$ , для которой сумма расстояний  $|AX| + |XB|$  до точек  $A$  и  $B$  наименьшая.





□ Рассмотрим, точку  $A'$ , симметричную точке  $A$  относительно прямой  $l$ . Для любой точки  $M$  этой прямой  $|A'M| = |AM|$ . Поэтому сумма  $|AM| + |MB| = |A'M| + |MB|$  принимает наименьшее значение  $|A'B|$  в точке  $X$  пересечения отрезка  $A'B$  с прямой  $l$ . □

Заметим, что точка  $X$  обладает таким свойством: *отрезки  $AX$  и  $BX$  составляют одинаковые углы с прямой  $l$ .*

Если бы мы решали задачу **6.6** по общей схеме, описанной в § 5, — с помощью линий уровня, — мы должны были бы действовать так: построить семейство эллипсов  $\{M: |AM| + |MB| = c\}$  с фокусами  $A$  и  $B$ , зависящее от параметра  $c$ , и выбрать из этих эллипсов тот, который касается прямой  $l$ .

Таким образом, *точка  $X$ , есть точка касания эллипса (с фокусами  $A$  и  $B$ ) и прямой  $l$ .* Действительно все другие точки  $M$  прямой, отличные от  $X$ , расположены вне эллипса, т. е. для них сумма  $|AM| + |MB|$  больше.

Сопоставляя первое решение со вторым, мы получаем так называемое фокальное свойство эллипса: *отрезки, соединяющие точку  $X$  эллипса с его фокусами, составляют равные по величине углы с касательной, проведённой к эллипсу в точке  $X$ .*

Это свойство имеет наглядную физическую интерпретацию. Если поверхность отражателя (фары) сделать в форме куска эллипсоида, а лампочку — точечный источник света — поместить в одном фокусе  $A$ , то после отражения лучи соберутся в другом фокусе  $B$ . (Слово «фокус» в переводе с латинского означает «очаг».)

Совершенно аналогично этому свойству эллипса фокальное свойство гиперболы: *отрезки, соединяющие точку  $X$  гиперболы с её фокусами, составляют равные по величине углы с касательной в точке  $X$ .* Это свойство можно доказать, решив двумя способами следующую задачу.

**6.7.** Дана прямая  $l$  и две точки  $A$  и  $B$  по разные стороны от неё, причём точка  $A$  расположена дальше от прямой  $l$ , чем точка  $B$ . Найти

на прямой такую точку  $X$ , для которой разность расстояний  $|AX| - |BX|$  наибольшая.

Одно решение приводит к такому ответу: если обозначить через  $A'$  точку, симметричную точке  $A$  относительно прямой  $l$ , то искомой точкой  $X$  будет точка пересечения прямой  $A'B$  с прямой  $l$  (?). Ясно, что для этой точки  $X$  отрезки  $AX$  и  $XB$  составляют равные по величине углы с прямой  $l$ .

Другое решение (по общей схеме из § 5) приводит, к такому ответу:  $X$  — это точка касания прямой  $l$  с некоторой гиперболой (с фокусами  $A$  и  $B$ ). Сопоставляя эти два ответа, приходим к фокальному свойству гиперболы.

Из фокальных свойств вытекает интересное следствие, относящееся к семейству всех эллипсов и гипербол с данными фокусами  $A$  и  $B$ .

Рассмотрим эллипс и гиперболу, проходящие через некоторую точку  $X$ . Проведём через точку  $X$  прямые, которые образуют одинаковые по величине углы с прямыми  $AX$  и  $BX$ . Эти прямые, очевидно, перпендикулярны друг другу.

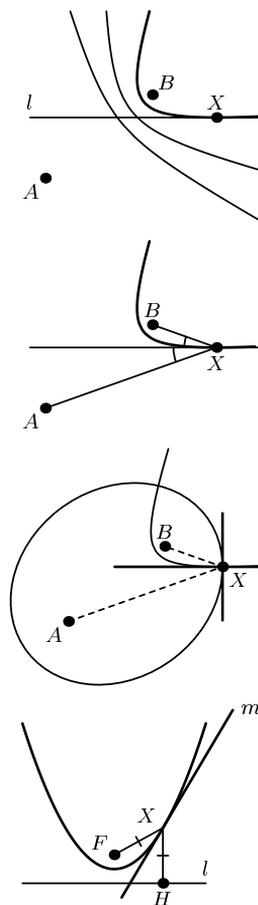
Из фокальных свойств следует, что одна прямая — это касательная к эллипсу, а другая — касательная к гиперболе. Таким образом, касательные к эллипсу и гиперболе перпендикулярны, тем самым семейства эллипсов и гипербол с фокусами  $A$  и  $B$  образуют два взаимно ортогональных семейства (см. стр. 64): каждая кривая одного семейства пересекает каждую кривую другого семейства под прямым углом.

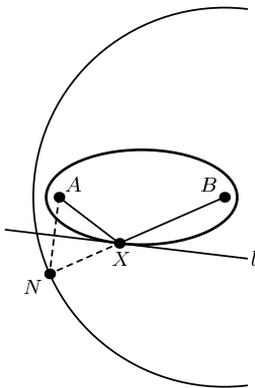
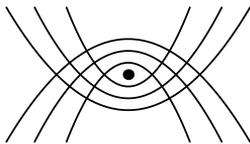
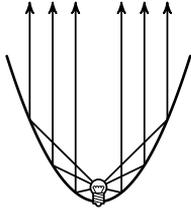
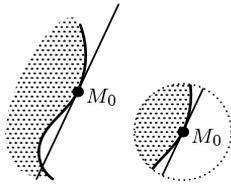
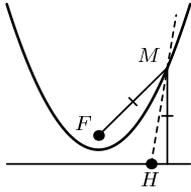
Эти два семейства будут хорошо видны на рисунке, относящемся к задаче 6.5а), если раскрасить клетки в шахматном порядке.

**Фокальное свойство параболы.** Пусть парабола имеет фокус  $F$  и директрису  $l$ , и пусть  $X$  — какая-нибудь её точка. Тогда *прямая  $XF$  и перпендикуляр, опущенный из  $X$  на  $l$ , составляют равные углы с касательной к параболе в точке  $X$ .*

Докажем это. Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $X$  на  $l$ . По определению параболы  $|XF| = |XH|$ . Следовательно, точка  $X$  лежит на медиатрисе  $m$  отрезка  $FH$ .

Докажем, что прямая  $m$  является касательной к параболе. Для этого покажем, что она имеет только одну общую точку с параболой (а именно, точку  $X$ ) и что вся парабола лежит





по одну сторону от прямой  $m$ . Прямая  $m$  разбивает плоскость на две полуплоскости. Одна из них состоит из точек  $M$ , которые ближе к  $F$ , чем к  $H$ .

Покажем, что парабола лежит в этой полуплоскости, т. е. для любой точки  $M$  параболы (отличной от точки  $X$ )  $|MF| < |MH|$ . В самом деле,  $|MF| = \rho(M, l)$ , а  $\rho(M, l) < |MH|$  (перпендикуляр короче наклонной).

**З а м е ч а н и е.** Для всех встречавшихся нам кривых касательная определялась так: касательная к кривой  $\gamma$  в точке  $M_0$  — это такая прямая  $l$ , проходящая через  $M_0$ , что кривая  $\gamma$  (или хотя бы часть кривой, заключённая в некотором круге с центром в  $M_0$ ), лежит по одну сторону от прямой  $l$ .

Фокальное свойство параболы можно использовать следующим образом. Если сделать отражатель в форме параболоида и поместить лампочку в фокусе  $F$ , то получится прожектор: все отражённые лучи будут параллельны оси параболоида.

**6.8.** Рассмотрим все параболы с данным фокусом и данной вертикальной осью. Они естественно разбиваются на два семейства: у парабол одного семейства ветви идут вверх, а у другого — вниз. Доказать, что любая парабола одного семейства ортогональна любой параболе другого семейства.

Два семейства парабол, о которых идёт речь в этой задаче, будут хорошо видны, если на рисунке к задаче к **6.5, б)** раскрасить клетки в шахматном порядке.

Решения следующих задач опираются только на определения кривых и их фокальные свойства.

**6.9. а)** Пусть задан эллипс с фокусами  $A$  и  $B$ . Доказать, что множество точек, симметричных фокусу  $A$  относительно всех касательных к эллипсу, — окружность.

**б)** Доказать, что множество оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса  $A$  на все касательные к эллипсу, — окружность.

□ **а)** Пусть  $l$  — касательная к эллипсу в точке  $X$ , и пусть  $N$  — точка, симметричная фоку-

су  $A$  относительно  $l$ . Тогда, как мы знаем (см. задачу **6.6**), точка  $X$  лежит на прямой  $NB$  и расстояние

$$|NB| = |AX| + |XB|$$

постоянно. Обозначим его, как прежде, через  $2a$ . Итак, расстояние от  $N$  до  $B$  постоянно и искомое множество — окружность с центром в точке  $B$  и радиусом  $2a$ .

б) Пусть  $M$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на  $l$ . Ясно, что

$$|AM| = \frac{1}{2}|AN|.$$

Из задачи **6.9**, а) мы знаем, что множество точек  $N$  есть окружность, и задача сводится к следующей. Дана окружность с центром в  $B$  радиуса  $2a$  и точка  $A$  внутри неё, найти множество середин отрезков  $AN$ , где  $N$  — произвольная точка окружности. Это множество — окружность радиуса  $a$  с центром в середине  $O$  отрезка  $AB$ .  $\square$

**6.10.** а), б). Доказать утверждения пунктов а) и б) задачи **6.9** для гиперболы.

**6.11.** Пусть задана парабола с фокусом  $F$  и директрисой  $l$ .

а) Найти множество точек, симметричных фокусу  $F$  относительно всех её касательных.

б) Доказать, что множество оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса  $F$  на касательные к параболе, есть прямая, параллельная  $l$ .

**6.12\*.** а) Доказать, что произведение расстояний от фокусов эллипса до его касательной — постоянная величина (не зависящая от касательной).  $\downarrow$

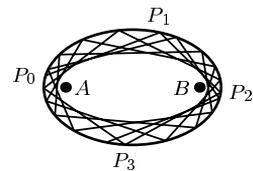
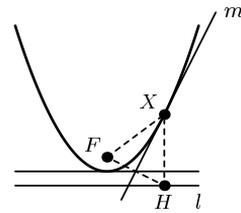
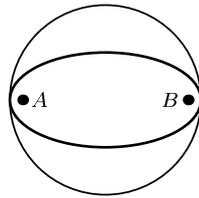
б) Найти множество точек, из которых эллипс виден под прямым углом.

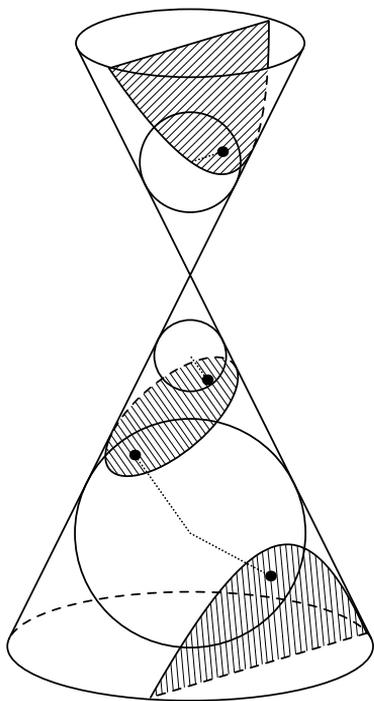
**6.13\*.** Решить задачу **6.12**, а) для гиперболы.

**6.14\*.** Решить пункт б) задачи **6.12** для параболы.

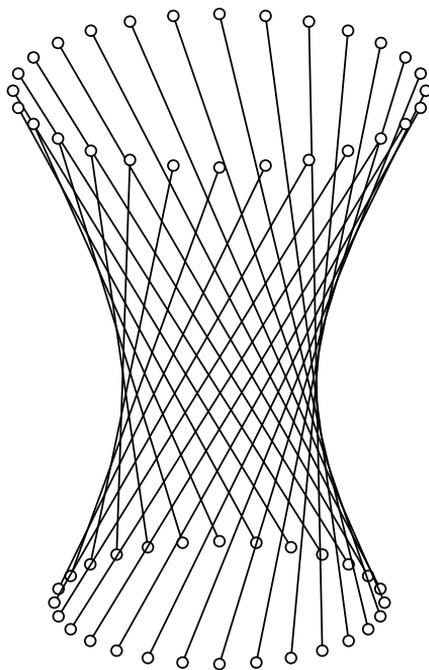
**6.15\*.** Пусть траектория  $P_0P_1P_2P_3 \dots$  луча света внутри зеркального эллипса не проходит через фокусы  $A$  и  $B$  ( $P_0, P_1, P_2, \dots$  — точки на эллипсе). Доказать, что:

а) если отрезок  $P_0P_1$  не пересекает отрезок  $AB$ , то все следующие отрезки  $P_1P_2, P_2P_3,$





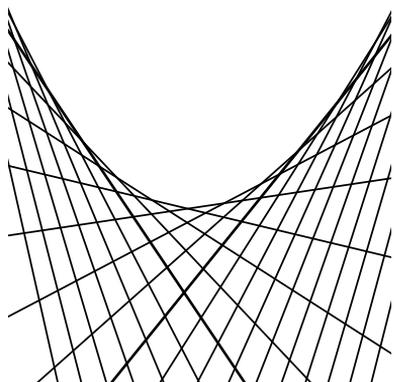
1)



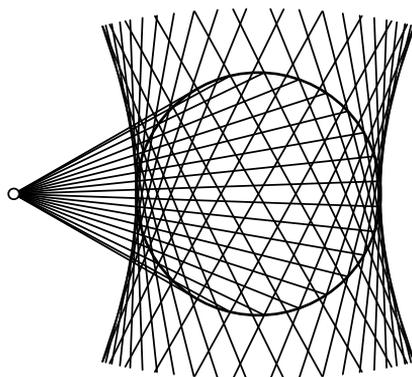
2)

Сечение конуса любой плоскостью, не проходящей через его вершину — эллипс, гипербола или парабола (рис. 1). Если в конус вписать шар, касающийся секущей плоскости, то точка касания будет фокусом соответствующего сечения, а директрисой является линия пересечения секущей плоскости с плоскостью окружности, по которой шар касается конуса.

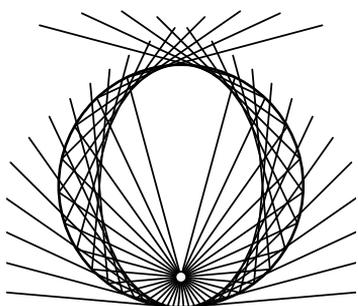
Объединение всех прямых, удалённых от данной прямой  $l$  в пространстве на данное расстояние и составляющих с  $l$  данный острый угол — поверхность, называемая *однополостным гиперboloидом вращения* (рис. 2). Ту же поверхность можно получить, вращая гиперболу вокруг её оси симметрии  $l$ . Касательная плоскость к гиперboloиду в любой его точке пересекает его по двум прямым. Остальные плоские сечения этой поверхности, как и конуса, — эллипсы, гиперболы и параболы.



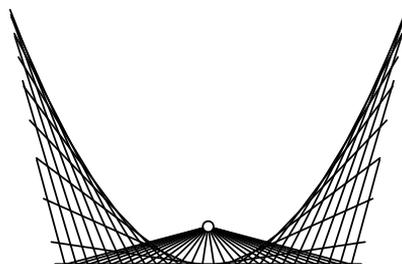
3)



4)



5)



6)

Если точки  $P$  и  $N$  двигаются равномерно по двум пересекающимся прямым, то все прямые  $PN$  либо параллельны друг другу, либо (в общем случае) касаются одной параболы (рис. 3). Если точки  $P$  и  $N$  двигаются равномерно по двум скрещивающимся прямым в пространстве, — то объединение всех прямых  $PN$  будет поверхностью *гиперболического параболоида* (седла). Касательная плоскость к седлу в любой его точке пересекает его по двум прямым; остальные плоские сечения седла — гиперболы и параболы. Поверхность седла можно получить также как объединение всех прямых, пересекающих две данные скрещивающиеся прямые  $l_1, l_2$  и параллельных данной плоскости (пересекающей  $l_1$  и  $l_2$ ).

Рис. 4–6 служат иллюстрацией к задачам 6.16 и 6.17. Заметьте, что на наших рисунках проведены только семейства прямых, однако создаётся полная иллюзия, что на них проведены и огибающие: гипербола, эллипс или парабола.

$P_3P_4, \dots$  не пересекают отрезок  $AB$  и касаются одного и того же эллипса с фокусами  $A$  и  $B$ ; ↓

б) если отрезок  $P_0P_1$  пересекает  $AB$ , то все следующие отрезки  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots$  пересекают отрезок  $AB$ , причём прямые  $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots$  касаются одной и той же гиперболы с фокусами  $A$  и  $B$ . ↓

**Кривые как огибающие прямых.** До сих пор знакомые нам кривые — окружности, эллипсы, гиперболы, параболы — возникали как множества точек, удовлетворяющих некоторым условиям. В следующих задачах эти кривые возникают иначе: как огибающие некоторого семейства прямых. Слово «огибающая» означает просто, что кривая касается всех прямых этого семейства.

**6.16.** Даны окружность с центром  $O$  и точка  $A$ . Через каждую точку  $M$  окружности проведена прямая, перпендикулярная отрезку  $MA$ . Доказать, что огибающей этого семейства будет

а) окружность, если  $A$  совпадает с центром  $O$ ;

б) эллипс, если  $A$  лежит внутри окружности;

в) гипербола, если  $A$  лежит вне окружности. ↓

**6.17.** Даны прямая  $l$  и точка  $A$ . Через каждую точку  $M$  данной прямой  $l$  проведена прямая, перпендикулярная отрезку  $MA$ . Доказать, что огибающей этого семейства прямых будет парабола. ↓

Эти семейства прямых изображены на стр. 78–79. Не случайно все они имеют огибающую: можно доказать, что любое «достаточно хорошее» семейство прямых — это либо множество параллельных прямых, либо — множество прямых, проходящих через одну точку, либо, в общем случае, — множество касательных к некоторой кривой (огибающей этого семейства).

**Уравнения кривых.** Мы начали этот параграф с геометрических определений эллипса, гиперболы и параболы. Много новой информации

об этих кривых можно получить, если воспользоваться методом координат.

Начнём с параболы. Хорошо известно аналитическое определение параболы как графика функции

$$y = ax^2. \quad (1)$$

Покажем, как геометрическое определение параболы, данное выше, приводит к этому уравнению.

Пусть расстояние от точки  $F$  до прямой  $l$  равно  $2h$ . Выберем систему координат  $Oxy$  так, чтобы ось  $Ox$  шла параллельно  $l$  на одинаковом расстоянии от  $F$  и от  $l$ , а ось  $Oy$  проходила через точку  $F$  (ось  $Oy$ , очевидно, будет осью симметрии параболы). Уравнение, получаемое из геометрического определения параболы, легко преобразуется в (1):

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y - h)^2} &= |y + h|, \\ \Downarrow \\ x^2 + y^2 - 2yh + h^2 &= y^2 + 2yh + h^2, \\ \Downarrow \\ y &= x^2 / (4h) \end{aligned}$$

(достаточно положить  $a = 1/(4h)$ ).

График любой функции  $y = ax^2 + bx + c$  — тоже парабола. Она получается из параболы  $y = ax^2$  параллельным переносом.

При гомотетии  $(x; y) \rightarrow (ax; ay)$  с коэффициентом  $a$  парабола  $y = x^2$  превращается в параболу  $y = ax^2$ . Таким образом, все параболы подобны друг другу. Но параболы с разными значениями параметра  $a$ , разумеется, не конгруэнтны: чем больше  $a$ , тем «острее вершина» параболы. Заметим, что параболу  $y = ax^2$  можно получить из параболы  $y = x^2$  сжатием (или растяжением) одной из координат: преобразованием  $(x; y) \rightarrow (x\sqrt{a}; y)$ , а также преобразованием  $(x; y) \rightarrow (x; y/a)$ .

Обратимся теперь к *эллипсу* и *гиперболе* с фокусами  $A$  и  $B$ . Приняв их оси симметрии за оси  $Ox$  и  $Oy$  прямоугольной системы координат — точки  $A$  и  $B$  будут иметь тогда координаты  $A(-c; 0)$  и  $B(c; 0)$ , — мы получим следующее уравнение эллипса:

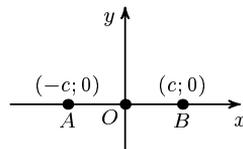
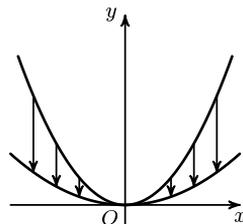
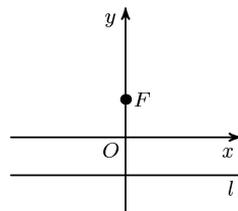
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a, \quad (2')$$

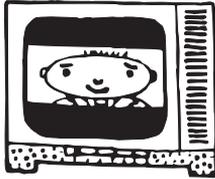
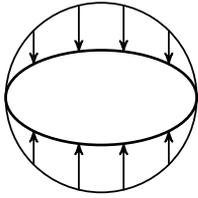
где  $a > c$ .

Избавившись от радикалов, это уравнение можно представить в более удобном виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } b = \sqrt{a^2 - c^2}. \quad (2)$$

Как перейти от (2') к (2), мы коротко обсудим ниже.





Из уравнения (2) видно, что эллипс можно получить также следующим образом: взять окружность радиуса  $a$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

и сжать её в  $a/b$  раз к оси  $Ox$ . При такой сжатии точка  $(x; y)$  перейдёт в точку  $(x; y')$ , где  $y' = yb/a$ . (Подставляя  $y = y'a/b$  в уравнение окружности, получим уравнение эллипса:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ .) Таким образом, если у вас есть телевизор, то вы можете получить эллипс без помощи ниток и гвоздей; нужно только включить телевизор, когда передают таблицу для настройки, и повернуть ручку «размер по вертикали» — тогда все окружности превратятся в эллипсы. Можно обойтись и без телевизора: тень, отбрасываемая наклонно расположенной тарелкой на стол, — это эллипс.

Два эллипса подобны друг другу, если у них одинаково отношение  $b/a$ .

Выбирая такую же систему координат, как и в случае эллипса, мы получаем уравнение гиперболы

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a, \quad (3')$$

где  $a < c$ ,

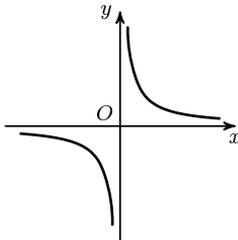
или, после упрощений,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } b = \sqrt{c^2 - a^2}. \quad (3)$$

Для того чтобы изучить поведение гиперболы в одной четверти  $x \geq 0, y \geq 0$ , построим график функции

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Очевидно, что эта функция определена при  $x \geq a$  и монотонно возрастает. Менее очевидно, что при увеличении  $x$  гипербола всё плотнее прижимается к прямой  $y = \frac{b}{a}x$ , т. е., как говорят, имеет эту прямую своей *асимптотой*<sup>1)</sup>. Всего у гиперболы две асимптоты  $y = bx/a$  и  $y = -bx/a$ .



Часто встречается другое уравнение, множество решений которого называется гиперболой, а именно, уравнение

$$xy = d \quad (d \text{ — некоторое число, } d \neq 0). \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Более точно эти слова означают, что для любой последовательности  $x_n$ , стремящейся к бесконечности, разность  $\left| \frac{b}{a} \sqrt{x_n^2 - a^2} - \frac{b}{a} x_n \right|$  стремится к нулю. Этот факт легко доказать, воспользовавшись равенством

$$x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}.$$

В чём же дело? Другая это кривая или та же самая?

Кривая, конечно, та же. Более точно: уравнение  $xy = d$  задаёт гиперболу с перпендикулярными асимптотами. Стандартное уравнение (3) для такой гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{2d} - \frac{y^2}{2d} = 1,$$

а уравнения получаются разными потому, что мы выбираем разные системы координат: в одном случае за оси координат мы принимаем асимптоты гиперболы, в другом — её оси симметрии (?).

Мы показали раньше, как сжатием получить эллипс из окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ . Точно так же гипербола  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (с любыми  $a$  и  $b$ ) может быть получена из гиперболы  $x^2 - y^2 = a^2$  с перпендикулярными асимптотами сжатием к оси  $Ox$  с коэффициентом  $a/b$ .

Две гиперболы подобны, если у них одинаково отношение  $b/a$ , или, что то же самое, одинаков угол  $2\gamma$  между асимптотами ( $\operatorname{tg} \gamma = b/a$ ).

**Избавление от радикалов.** Покажем, как одновременно из уравнений (2') и (3') можно получить более простые (2) и (3) (стр. 81–82). Положим

$$z_1 = \left( \frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{2} \right)^2, \quad (3'')$$

$$z_2 = \left( \frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{2} \right)^2. \quad (2'')$$

Пусть  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ . Нетрудно убедиться, что  $0 < z_1 < z_2$ ,  $z_1 + z_2 = x^2 + y^2 + c^2$ ,  $z_1 z_2 = c^2 x^2$ . Мы видим, что  $z_1$  и  $z_2$  — корни квадратного уравнения относительно  $z$

$$z^2 - (x^2 + y^2 + c^2)z + c^2 x^2 = 0. \quad (5)$$

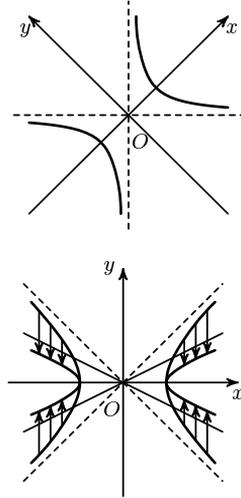
Трёхчлен, стоящий в левой части равенства (5), отрицателен при  $z = c^2$ , поэтому  $z_1 < c^2$ ,  $z_2 > c^2$ . Заметим, что уравнение (5) можно записать так:

$$x^2(z - c^2) + y^2 z = z(z - c^2),$$

$$\Downarrow \\ \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z - c^2} = 1. \quad (5')$$

Покажем, что при замене  $z$  на  $a^2$  уравнение (5') определяет эллипс (при  $a > c$ ) или гиперболу (при  $a < c$ ) на плоскости  $Oxy$ .

Пусть  $a > c > 0$ . Итак, мы выяснили, что (при  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ) формулы (3'') и (2'') выражают меньший



и больший корень уравнения (5'), причём  $z_1 < c^2 < z_2$ . Уравнение эллипса (2') может быть, очевидно, записано в виде  $z_2 = a^2$ , а так как  $z_2$  является корнем уравнения (5'), любая точка  $(x; y)$  эллипса ( $x \neq 0, y \neq 0$ ) удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (6)$$

Обратно, если точка  $(x; y)$  удовлетворяет уравнению (6), то число  $z = a^2$  служит корнем уравнения (5'), причём, поскольку  $a^2 > c^2$ , т. е.  $a^2$  — больший корень (5'), поэтому  $a^2 = z_2$ . Итак, при  $a > c$  (2') эквивалентно (6).

Аналогично можно показать, что при  $a < c$  (3') эквивалентно (6), т. е. уравнение гиперболы  $z_1 = a^2$  также охватывается формулой (6).

Легко проверить, что при  $x = 0$  или  $y = 0$  уравнение (6) также эквивалентно (2') и (3') (соответственно для  $a > c$  и  $a < c$ ).

Таким образом, мы доказали, что уравнение (6) объединяет уравнения (2') и (3') эллипсов и гипербол. Положив  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  (при  $a > c$ ) или  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$  (при  $a < c$ ), приходим соответственно к уравнениям (2) и (3). Итак, с помощью (6) мы доказали эквивалентность (2) и (2'), (3) и (3').

Это доказательство иллюстрирует способ, который часто позволяет освободиться от радикалов: рассмотреть одновременно с данным выражением «сопряжённые» — отличающиеся от него знаками радикалов.

**Конец азбуки.** Изучим, наконец, ещё одну функцию на плоскости, карта линии уровня которой включает все три типа кривых, появившихся в этом параграфе. Это будет последняя буква нашей азбуки.

**Р.** Пусть заданы точка  $F$  и прямая  $l$ , не содержащая  $F$ . Множество точек, отношение расстояний которых до  $F$  и до  $l$  равно постоянной величине  $k$ , — эллипс (при  $k < 1$ ), парабола (при  $k = 1$ ) или гипербола (при  $k > 1$ ).

Докажем это. Введём систему координат так же, как в пункте «парабола». Уравнение нужного множества:

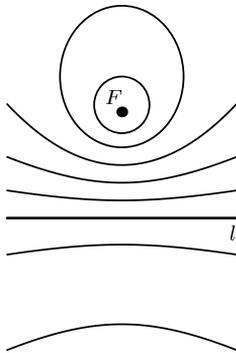
$$\frac{\sqrt{x^2 + (y - h)^2}}{|y + h|} = k;$$

при  $k = 1$ , как мы уже видели, оно эквивалентно уравнению параболы  $y = ax^2$ , где  $a = 1/(4h)$ . При  $0 < k < 1$  его можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{эллипс}), \quad (7)$$

а при  $k > 1$  — к виду

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{гипербола}), \quad (8)$$



где в обоих случаях

$$a = 2kh/\sqrt{|k^2 - 1|}, \quad b = 2kh/|k^2 - 1|,$$

$$d = -h(k^2 + 1)/(k^2 - 1).$$

Уравнения (7) и (8) получаются из стандартных (2), (3) параллельным переносом, а также переменной ролей  $x$  и  $y$ . Теперь фокусы кривых лежат на оси  $Oy$ , а центры сдвинуты в точку  $(0; d)$ . Можно проверить, что точка  $F$  является фокусом не только параболы, но также всех эллипсов и гипербол. Прямая  $l$  называется их директрисой.

Итак, мы выяснили, что множество линий уровня функции

$$f(M) = \rho(M, F)/\rho(M, l)$$

состоит из одной параболы, эллипсов и гипербол.

Мы могли бы догадаться, что в ответе должны получиться эти кривые — «конические сечения», (см. стр. 70 и 78), рассуждая следующим образом. Рассмотрим две функции на плоскости:  $f_1(M) = \rho(M, F)$  и  $f_2(M) = k\rho(M, l)$ . График первой (см. стр. 62) — поверхность конуса, график второй состоит из двух наклонных полуплоскостей ( $k$  — тангенс угла наклона этих полуплоскостей к горизонту). Пересечение этих двух графиков: эллипс, парабола или гипербола. Проекция этих кривых, лежащих в наклонной плоскости, на горизонтальную плоскость дают интересные нас множества

$$\{M : f_1(M) = f_2(M)\} = \{M : \rho(M, F) = k\rho(M, l)\}.$$

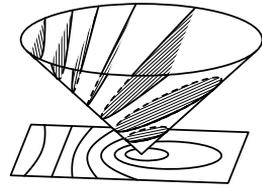
При проекции вид кривой изменится так же, как при сжатии к прямой  $l$  (в  $\sqrt{k^2 + 1}$  раз). Поэтому нужные нам кривые — тоже эллипсы, гиперболы и парабола.

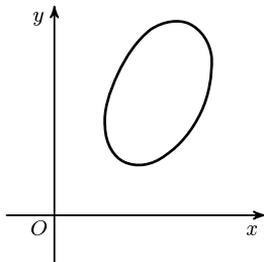
Как мы уже неоднократно убедились, кривые, которым посвящён этот параграф, — эллипс, гипербола и парабола — имеют много общих или очень похожих свойств. Родство между этими кривыми имеет простое алгебраическое объяснение: все они задаются уравнениями второй степени. Конечно, характерные уравнения этих кривых (1), (2), (3), (4), т. е.

$$y = ax^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad xy = d,$$

получаются только в специально выбранных системах координат — если выбрать систему координат иначе, то уравнение может получиться более сложным. Однако нетрудно доказать, что в любой системе координат уравнения этих кривых имеют вид

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (9)$$





(здесь  $a, b, c, d, e, f$  — некоторые числа,  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ).

Замечательно, что верно и обратное: любое уравнение второй степени  $p(x, y) = 0$ , т. е. уравнение вида (9), определяет одну из знакомых нам кривых. Сформулируем более точную теорему.

*Уравнение (9) определяет эллипс, гиперболу или параболу, если только левая часть не раскладывается на множители (тогда получилась бы пара прямых) и принимает значения разных знаков (иначе получилась бы одна точка, одна прямая или пустое множество).*

Отсюда ясно происхождение общего названия для эллипсов, гипербол и парабол: «кривые второго порядка».

Важная алгебраическая теорема об уравнениях второй степени, которую мы сформулировали, очень удобна для отыскания точечных множеств, удовлетворяющих геометрическому условию: если мы видим, что в некоторой системе координат это условие выражается уравнением второй степени, значит, искомое множество — эллипс, гипербола или парабола. (Конечно, в вырожденном случае может получиться пара прямых, окружность — частный случай эллипса, одна точка и т. п.) Остаётся, найти их размеры и расположение на плоскости (фокусы, центр, асимптоты и т. п.).

**6.18.** Найти множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных взаимно перпендикулярных прямых на  $c$  больше расстояния до точки их пересечения.

**6.19.** На плоскости даны прямая  $l$  и точка  $A$ . Найти множество точек

а) сумма расстояний от которых до  $A$  и до  $l$  равна  $c$ ;

б) разность расстояний от которых до  $A$  и до  $l$  равна (по модулю)  $c$ ;

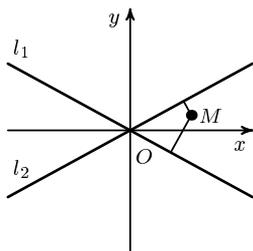
в) отношение расстояний от которых до  $A$  и до  $l$  меньше  $c$ ,

где  $c$  — постоянная положительная величина.

**6.20.** Найти множество точек

а) сумма;

б) разность



квадратов расстояний от которых до двух заданных пересекающихся прямых  $l_1, l_2$  равна постоянной величине  $d$ . Нарисовать карту линий уровня соответствующих функций

а)  $f(M) = \rho^2(M, l_1) + \rho^2(M, l_2)$ ;

б)  $f(M) = \rho^2(M, l_1) - \rho^2(M, l_2)$ .

**6.21.** На плоскости заданы точка  $F$  и прямая  $l$ . Нарисовать карту линий уровня функций

а)  $f(M) = \rho^2(M, F) + \rho^2(M, l)$ ;

б)  $f(M) = \rho^2(M, F) - \rho^2(M, l)$ .

**6.22.** Вершина  $O$  шарнирного параллелограмма  $OPMQ$  закреплена, а стороны  $OP$  и  $OQ$  вращаются с одинаковой по величине угловой скоростью в разные стороны. По какой линии движется вершина  $M$ ?

□ Пусть  $|OP| = p$ ,  $|OQ| = q$ . Поскольку прямые  $OP$  и  $OQ$  вращаются в разные стороны, в некоторый момент времени они совпадут. Примем этот момент времени за начало отсчёта:  $t = 0$ , а совпадающие прямые — за ось  $Ox$  (начало координат поместим в точку  $O$ ). Пусть стороны  $OP$  и  $OQ$  вращаются с угловой скоростью  $\omega$ . Тогда координаты точек  $P, Q$  в момент времени  $t$  будут соответственно равны

$$(p \cos \omega t; p \sin \omega t), \quad (q \cos \omega t; -q \sin \omega t).$$

Следовательно, координаты точки  $M(x; y)$  будут

$$x = (p + q) \cos \omega t,$$

$$y = (p - q) \sin \omega t$$

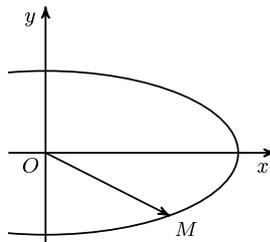
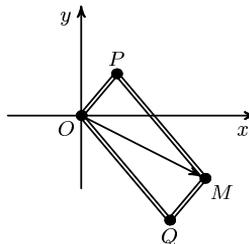
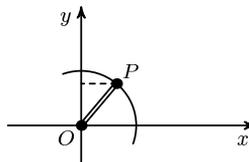
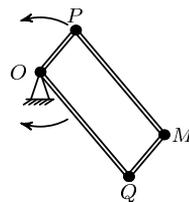
(ведь  $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ ). Следовательно, точка  $M$  пробегает эллипс

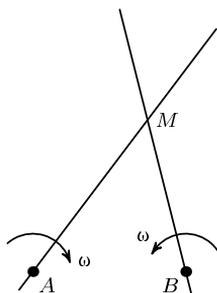
$$\frac{x^2}{(p + q)^2} + \frac{y^2}{(p - q)^2} = 1. \quad \square$$

В решении этой задачи мы получили эллипс как множество точек  $(x; y)$  вида

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t \quad (10)$$

( $t$  — любое действительное число). Уравнения такого вида, выражающие координаты  $(x; y)$  через дополнительный параметр  $t$ , называются *параметрическими*. В данном случае роль переменного параметра  $t$  играет время.





**6.23\***. На плоскости вокруг двух фиксированных точек  $A$  и  $B$  с одинаковой угловой скоростью вращаются две прямые, проходящие через эти точки. Какую линию описывает точка  $M$  их пересечения, если прямые вращаются в разные стороны? ↓

**6.24\***. Найти на плоскости множество точек  $M$ , для которых  $\angle MBA = 2\angle MAB$ , где  $AB$  — данный отрезок на плоскости. ↓

**6.25\***. а) Рассмотрим все отрезки, отсекающие от данного угла треугольник данной площади  $S$ . Доказать, что середины этих отрезков лежат на одной гиперболе  $\Gamma$ , асимптоты которой — стороны угла. ↓

б) Доказать, что все эти отрезки касаются гиперболы  $\Gamma$ . ↓

в) Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключённый между асимптотами, делится точкой касания пополам. ↓

**6.26\***. а) Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $|AC| = |BC|$ ). Найти множество точек  $M$  плоскости, расстояние от которых до прямой  $AB$  равно среднему геометрическому расстояний до прямых  $AC$  и  $BC$ .

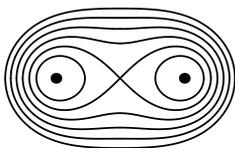
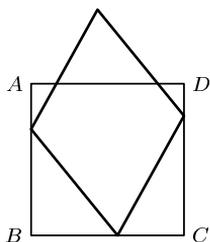
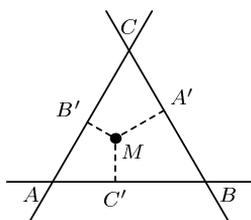
б) Три прямые, пересекаясь, образуют равносторонний треугольник. Найти множество точек  $M$ , расстояние от которых до одной из этих прямых равно среднему геометрическому расстояний до двух других прямых.

**6.27\***. Три вершины ромба лежат соответственно на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  данного квадрата  $ABCD$ . Где может лежать четвёртая вершина?

**Алгебраические кривые.** Разумеется, множества точек, которые могут встретиться в геометрических задачах, не ограничиваются только прямыми и кривыми второго порядка. Приведём два примера.

Множество точек, произведение расстояний от которых до данных двух точек  $F_1$  и  $F_2$  равно данной положительной величине  $p$ , называется овалом Кассини. На рисунке изображено целое семейство этих кривых — семейство линий уровня функции

$$f(M) = \rho(M, F_1) \cdot \rho(M, F_2).$$



Уравнения этих кривых можно записать так:

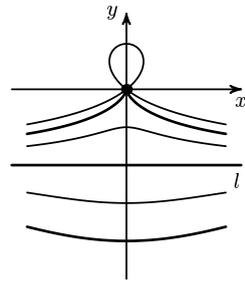
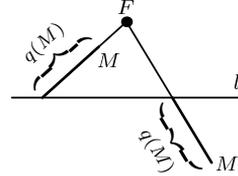
$$((x - c)^2 + y^2)((x + c)^2 + y^2) = p^2.$$

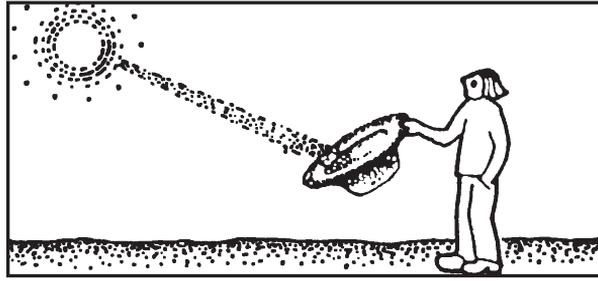
Особенно интересную форму «восьмёрки» имеет овал Кассини при  $p = c^2$ . Для  $p < c^2$  кривая состоит из двух отдельных кусков, окружающих точки  $F_1$  и  $F_2$ .

Ещё один пример. Пусть задана точка  $F$  и прямая  $l$ . Обозначим через  $q(M)$  расстояние от точки  $M$  до точки пересечения прямых  $FM$  и  $l$ . Множество точек  $\{M : q(M) = d\}$  называется *конхоидой Никомеда*. Её уравнение в системе координат, где  $F$  — начало координат, а  $l$  задаётся уравнением  $y + a = 0$ , выглядит так:

$$(x^2 + y^2)(y + a)^2 - d^2 y^2 = 0.$$

Вообще кривая, задаваемая уравнением  $P(x, y) = 0$ , где  $P(x, y)$  — многочлен от  $x$  и  $y$ , называется *алгебраической кривой*. Степень многочлена  $P$  (при условии, что он не раскладывается на множители) называется *порядком* этой кривой. Таким образом, овал Кассини и конхоида — кривые четвёртого порядка. Уже из этих двух примеров видно, что алгебраические кривые (порядка выше 2) могут быть устроены причудливым образом, иметь особые точки (острия, как конхоида при  $a = d$ , точки самопересечения), и вид этих кривых может сильно меняться при изменении параметров. С некоторыми новыми кривыми мы ещё встретимся в следующем параграфе.





## § 7. Вращения и траектории

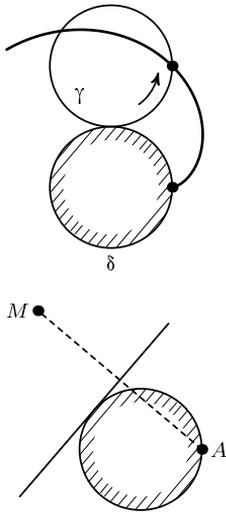
В этом заключительном параграфе мы представим читателю замечательные кривые, которые естественно определяются как траектории точек окружности, катящейся по прямой или окружности. Наиболее интересные их свойства связаны с касательными. В начале книги мы сказали, что огибающей семейства отрезков из задачи 0.1 про котёнка служит кривая с четырьмя острями — астроида. Здесь читатель найдёт объяснение этому факту, а также увидит, почему световое пятно в чашке, образуемое отражёнными лучами, имеет характерную особенность — острей. Любитель классической геометрии узнает, как связаны между собой окружность девяти точек треугольника, его прямые Симсона и их огибающая — циклоидальная кривая с тремя острями.

Вначале мы подробно изучим одну из самых простых циклоидальных кривых.

**Кардиоида.** Обычно эту кривую определяют как траекторию точки, совершающей такое сложное движение: окружность катится без скольжения по неподвижной окружности того же радиуса; траектория точки подвижной окружности называется *кардиоидой*. Можно дать и другие, геометрические, определения кардиоиды. Сформулируем два из них в виде задачи.

**7.1.** Доказать, что

а) множество точек, симметричных определённой точке  $A$  данной окружности относительно всевозможных касательных к этой окружности, — кардиоида;



б) множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки  $A$  данной окружности на всевозможные касательные к ней, — кардиоида.

□ а) Рассмотрим подвижную окружность  $\gamma$ , которая касается данной окружности  $\delta$  в точке  $A$  и имеет тот же радиус. Покажем окружность  $\gamma$  по окружности  $\delta$  и проследим за траекторией той точки  $M$  подвижной окружности, которая в начальный момент совпадала с точкой  $A$ .

Мы предполагаем, что качение происходит без скольжения. Это означает, что в каждый момент времени длины дуг  $AT$  и  $MT$  равны ( $T$  — переменная точка касания окружностей). Следовательно, точка  $M$  симметрична точке  $A$  относительно касательной, проведённой в точке  $T$ .

За один оборот точка  $T$  пробегает всю окружность  $\delta$ , а  $M$  — всю кардиоиду.

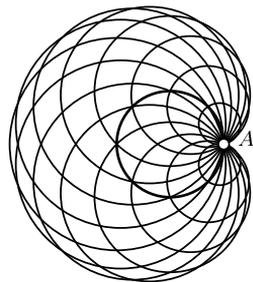
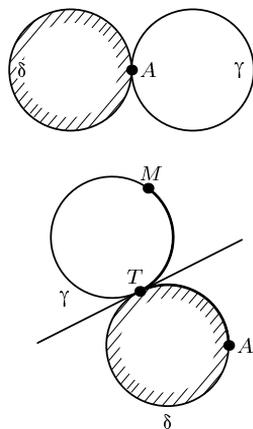
б) Ясно, что это множество получается из того, о котором говорится в а), гомотетией с коэффициентом  $1/2$  и центром  $A$ . Тем самым оно — тоже кардиоида, но вдвое меньшего размера. □

Используя задачу 7.1, можно построить как угодно много точек кардиоиды и тем самым довольно точно её нарисовать. Это — замкнутая кривая, имеющая в точке  $A$  характерную особенность — «остриё». По форме она похожа на срез яблока или, несколько меньше, на очертание сердца — отсюда и её название (*kardia* — сердце).

Следующее красивое определение кардиоиды, где она предстаёт как «огibaющая окружностей», также вытекает из задачи 7.1.

**7.2\*.** Дана окружность и на ней — точка  $A$ . Доказать, что объединение всех окружностей, проходящих через точку  $A$ , центры которых лежат на данной окружности, — область, ограниченная кардиоидой. ↓

**Сложение вращений.** Ниже мы продемонстрируем некоторые приёмы, позволяющие устанавливать геометрические свойства кривых с помощью кинематики, и в качестве примера будем неоднократно возвращаться к кардиоиде



де. Но прежде чем двигаться дальше, обсудим последнюю фразу в решении задачи 7.1, а).

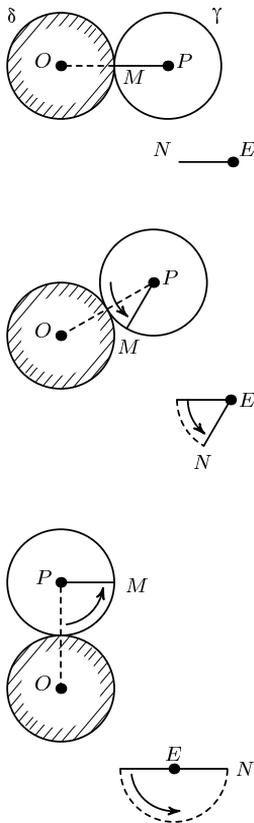
Мы сказали, что точка  $T$  возвращается в начальное положение  $A$  после одного оборота. Поскольку мы имеем дело сразу с несколькими вращениями, эту фразу надо уточнить: о каком «обороте», т. е. о каком вращении мы говорим? Имелось в виду, что центр  $P$  подвижной окружности  $\gamma$  (а значит, и точка касания  $T$ ) делает один оборот. Сама же окружность  $\gamma$  (быть может, лучше говорить здесь «круг  $\gamma$ », представляя его себе в виде пластинки) при этом вращается вокруг своего центра  $P$  довольно быстро. Выясним такой вопрос.

**7.3.** Пусть центр  $P$  подвижного круга  $\gamma$ , катящегося по неподвижному кругу  $\delta$  того же радиуса, делает один оборот. Сколько раз повернётся за это время круг  $\gamma$  (сколько он сделает оборотов вокруг своего центра  $P$ )?

□ Для того чтобы следить за вращением круга  $\gamma$ , проведём на нём некоторый радиус  $PM$ ; зафиксируем где-то на плоскости точку  $E$  и рассмотрим такой отрезок  $EN$ , что  $\vec{EN} = \vec{PM}$ . Вопрос, поставленный в задаче 7.3, заключается в следующем: сколько оборотов сделает отрезок  $EN$  вокруг своего конца  $E$  за то время, пока отрезок  $OP$  повернётся на  $360^\circ$ ? Иначе говоря, каково отношение угловых скоростей этих отрезков?

Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно рассмотреть два положения подвижного круга. Из рисунка видно, что когда радиус  $OP$  повернулся на  $90^\circ$ , отрезок  $EN$  повернулся на  $180^\circ$ . Так будет продолжаться и дальше, — в результате при повороте радиуса  $OP$  на  $360^\circ$  отрезок  $EN$  повернётся на  $720^\circ$ , т. е. сделает два полных оборота. (Отношение угловых скоростей равно 2.) Это и есть ответ к задаче 7.3. □

Если в качестве точки  $E$  из решения задачи 7.3 взять центр  $O$  неподвижного круга и от него отложить отрезок  $\vec{OQ} = \vec{PM}$ , то мы получим параллелограмм  $OPMQ$ . При равномерном качении круга  $\gamma$  по  $\delta$  вершина  $O$  неподвижна, а стороны  $OP$  и  $OQ$  вращаются с угловыми ско-



ростями  $\omega$  и  $2\omega$  соответственно (в одном и том же направлении). Таким образом, мы получаем ещё одно определение кардиоиды, использующее удобную модель шарнирного параллелограмма: *если стороны  $OP$  и  $OQ$  ( $|OP| = 2|OQ|$ ) вращаются вокруг точки  $O$  с угловыми скоростями  $\omega$  и  $2\omega$ , то траектория четвёртой вершины  $M$  параллелограмма  $OPMQ$  — кардиоиды.*

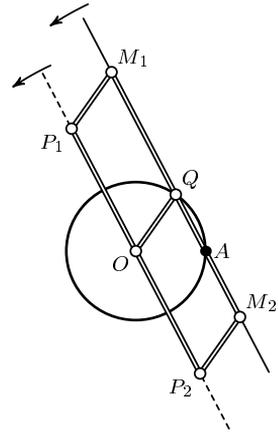
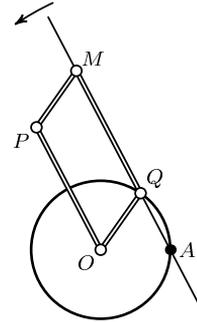
Теперь легко обосновать ещё один способ построения точек кардиоиды и получить ещё несколько её интересных свойств.

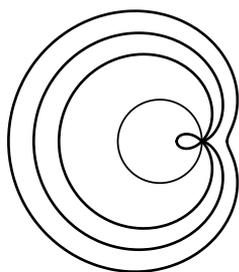
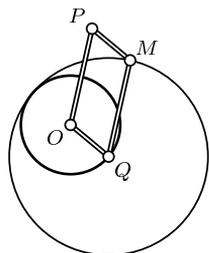
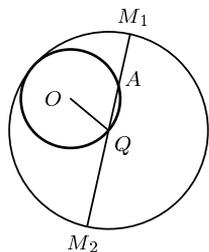
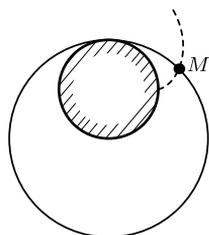
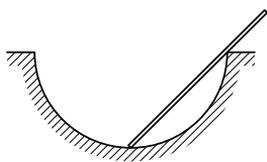
**7.4.** Если на каждой прямой  $l$ , проходящей через точку  $A$  данной окружности  $\delta$  радиуса  $r$ , отложить от точки  $Q$  пересечения  $l$  и  $\delta$  ( $A \neq Q$ ) отрезок  $QM$  длины  $2r$ , то множество всех полученных таким образом точек  $M$  будет кардиоидой.

□ Для каждого положения прямой  $l$  можно построить параллелограмм  $OPMQ$ , у которого  $Q$  и  $M$  — те же, что в условии задачи. Тогда при вращении прямой  $l$  вокруг точки  $A$  с угловой скоростью  $\omega$  стороны  $OP$  и  $OQ$  параллелограмма будут вращаться как раз с нужными скоростями  $\omega$  и  $2\omega$  (по теореме «колечко на окружности» из § 1), поэтому точка  $M$  будет пробегать кардиоиду. □

Попробуйте на большом листе бумаги нарисовать кардиоиду, пользуясь задачами **7.1** и **7.4**, и убедиться, что получается та же самая кривая. Пожалуй, второй способ даже удобнее. Заметим, что в задаче **7.4** мы можем отложить от точки  $Q$  отрезок  $QM$  длины  $2r$  в ту и другую сторону. Мы получим тем самым две точки  $M_1$  и  $M_2$  кардиоиды; они соответствуют двум противоположным положениям шарнирного параллелограмма (если точка  $Q$  сделает один полный оборот и вернётся в исходное положение, то сторона  $OM$  повернётся на  $180^\circ$ , а  $M_1$  перейдёт в  $M_2$ ). Это обстоятельство приводит к следующему свойству.

**7.5.** Доказать, что любая хорда  $M_1M_2$  кардиоиды, проходящая через её остриё  $A$ , имеет длину  $4r$ , а середина этой хорды лежит на неподвижной окружности (радиуса  $r$ ), соответствующей кардиоиде.





Вот ещё две задачи, где используется второй способ построения кардиоиды.

**7.6.** Палка длины  $2r$  движется в вертикальной плоскости так, что нижний её конец упирается в дно ямы, имеющей (в вертикальном сечении) форму полукруга радиуса  $r$  и при этом касается края ямы. Доказать, что свободный верхний конец палки движется по кардиоиде.

**7.7.** По неподвижному кругу радиуса  $r$  катится без скольжения, охватывая его, обруч радиуса  $2r$ . Доказать, что траектория точки обруча — кардиоида.

□ Одно из решений этой задачи можно получить, если сравнить её с теоремой Коперника **0.3**: ведь здесь речь идёт о тех же двух окружностях, но неподвижен внутренний круг радиуса  $r$ , а внешняя окружность радиуса  $2r$  по нему катится. В этой ситуации теорема Коперника показывает, что если прикрепить к обручу палку — диаметр  $M_1M_2$ , то при качении эта палка будет проходить через фиксированную точку  $A$  неподвижной окружности. При этом середина  $Q$  палки  $M_1M_2$  будет двигаться по неподвижной окружности  $\delta$ , а  $|M_1Q| = |QM_2| = 2r$ , так что мы приходим к задаче **7.4** и видим, что точки  $M_1$  и  $M_2$  движутся по одной и той же кардиоиде.

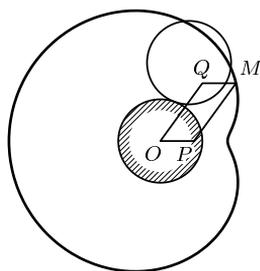
Можно рассуждать несколько иначе, сведя дело прямо к шарнирному параллелограмму. Пусть  $M$  — точка обруча, за которой мы следим,  $Q$  — его (переменный) центр. Построим параллелограмм  $OPMQ$ . Если его звено  $OQ$  вращать с угловой скоростью  $2\omega$ , то обруч, а с ним и звено  $QM$ , будет вращаться с угловой скоростью  $\omega$ . □

Кривая, с которой мы довольно подробно познакомились, — кардиоида — естественно включается в семейство кривых, которые называются *конхоидами круга* или *улитками Паскаля*: если в условиях задачи **7.4** откладывать на прямой  $l$ , проходящей через точку  $A$ , отрезок  $QM$  некоторой постоянной длины  $h$  (в ту и другую сторону), то мы получим при каждом  $h > 0$  одну из этих кривых; при  $h = 2r$  это будет кардиоида. (Сравните определение этих кривых с определением конхоиды в § 6, стр. 89.) Оказывается, улитке Паскаля при каждом  $h$  можно дать кинематическое определение. Это сделано в следующей задаче.

**7.8.** а) Доказать, что вершина  $M$  шарнирного параллелограмма, у которого вершина  $O$  закреплена, а стороны  $OP$  и  $OQ$  вращаются с угловыми скоростями  $2\omega$  и  $\omega$ , описывает улитку Паскаля.

б) На плоскости закреплена окружность радиуса  $r$ . По ней катится окружность радиуса  $r$ , с которой жёстко скреплена (подвижная) плоскость. Доказать, что любая точка этой плоскости описывает улитку Паскаля.

в) Та же задача, в которой вместо подвижной окружности радиуса  $r$  фигурирует обруч радиуса  $2r$ , охватывающий неподвижную окружность.

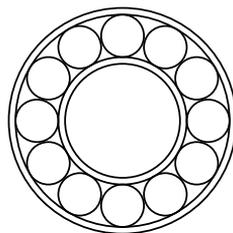


Приведём теперь несколько разных задач, в которых требуется разобраться в сложении вращений с другим отношением скоростей, чем у кардиоиды, и упоминаются некоторые из других циклоидальных кривых, изображённых на рисунке на стр. 96–97.

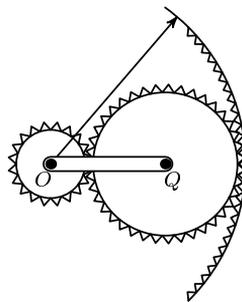
**7.9.** По неподвижной окружности радиуса  $R$  катится (снаружи) круг радиуса а)  $R/2$ ; б)  $R/3$ ; в)  $2R/3$ . Сколько оборотов он сделает, пока его центр опишет один оборот вокруг центра неподвижной окружности? ↓

**7.10.** Та же задача, но круг катится изнутри.

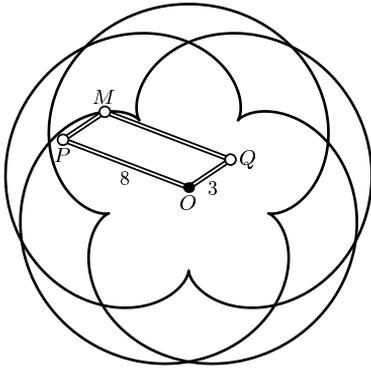
**7.11.** Между осью подшипника диаметра 6 мм и его неподвижной обоймой диаметра 10 мм расположены шарики диаметра 2 мм. Считая, что при вращении оси шарики катятся по оси и обойме без скольжения, определить, с какой угловой скоростью а) вращаются шарики; б) их центры бегают вокруг центра подшипника, если ось вращается со скоростью 100 оборотов в секунду.



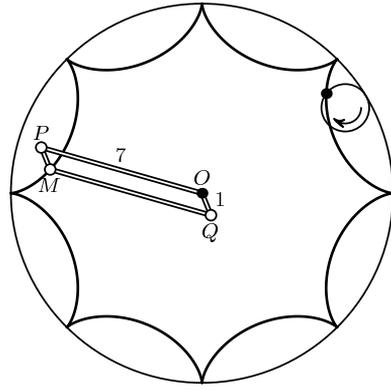
**7.12.** Зацепление, приводящее во вращение точильный камень, устроено так, как показано на рисунке. Найти отношение радиусов подвижных колёс, при котором маленькое колесо (точило) будет вращаться в 12 раз быстрее ручки  $OQ$ , приводящей его в движение.



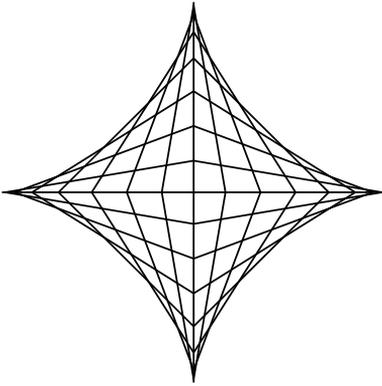
Рассмотрим две точки окружности, катящейся по кругу. Ясно, что они описывают конгруэнтные траектории. В частности, может быть и так, что эти траектории совпадают — две точки движутся по одной линии вслед друг за другом. Так, в решении задачи **7.7** мы выяснили, что диаметрально противоположные



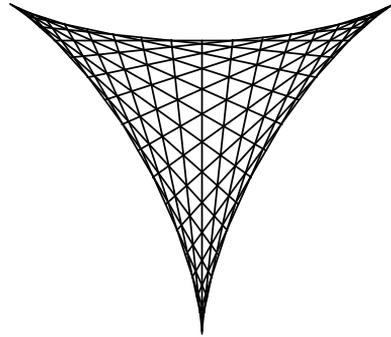
1)



2)



3)



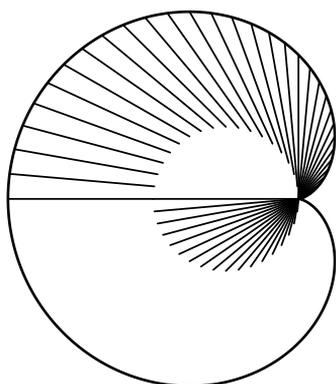
4)

Назовём *k*-циклоидой кривую, описываемую вершиной *M* шарнирного параллелограмма *OPMQ*, у которого вершина *O* закреплена, а звенья *OP* и *OQ* вращаются вокруг неё, причём отношение  $\omega_{OP}/\omega_{OQ}$  угловых скоростей равно *k*, а отношение  $|OP|/|OQ|$  длин звеньев равно  $1/|k|$  ( $k \neq 0, +1, -1$ ).

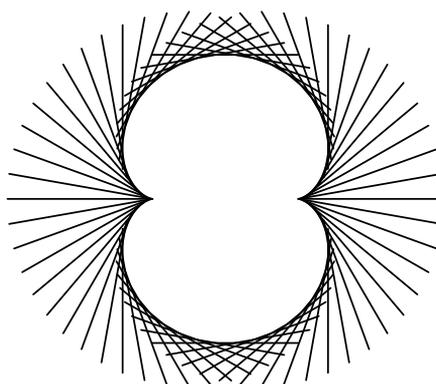
Если две точки *P* и *N* движутся равномерно по одной окружности так, что отношение  $\omega_P/\omega_Q$  их угловых скоростей равно *k*, то огибающей прямых *PN* будет *k*-циклоида (7.19).

Формы *k*-циклоиды и  $(1/k)$ -циклоиды совпадают (7.14).

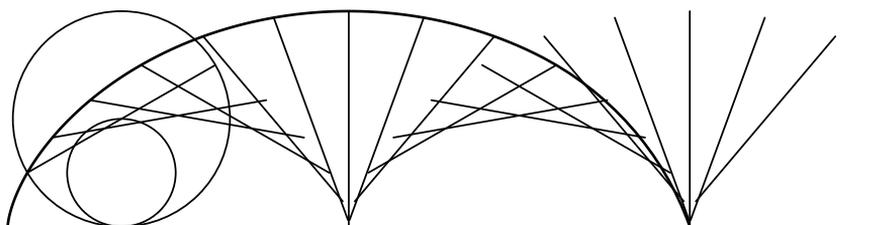
*k*-циклоиду можно определить также как траекторию точки окружности радиуса *r*, катящейся без скольжения по окружности радиуса  $|k - 1|r$ , причём при  $k > 1$  касание окружностей внешнее, а при  $k < 1$  — внутреннее.



5)



6)



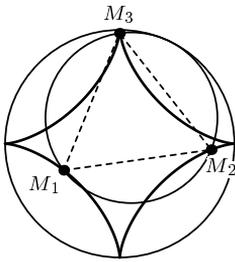
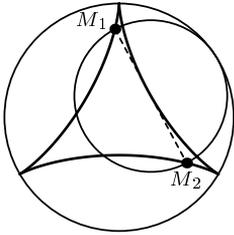
7)

Обычно  $k$ -циклоиды при  $k > 0$  называют *эпициклоидами*, при  $k < 0$  — *гипоциклоидами*.

На рис. 1–6 изображены  $k$ -циклоиды для  $k = 3/8, -1/7, -3, -2, 2$  и  $3$ . Последние четыре кривые имеют специальные названия: *астроида*, *кривая Штейнера*, *кардиоида* и *нефроида*. На рис. 3–6 показаны некоторые семейства отрезков, связанные с этими кривыми; все отрезки на каждом из рисунков имеют одинаковую длину (7.4, теорема о двух кругах на стр. 99, 7.21).

На последнем рис. 7 изображена траектория точки окружности, катящейся по прямой. Эта кривая называется *циклоидой*. Огибающей диаметров катящейся окружности является циклоида вдвое меньшего размера (теорема о двух кругах).

точки обруча описывают одну и ту же кардиоиду. В этом можно было бы убедиться, заметив, что траектории этих точек имеют остриё в одной и той же точке неподвижной окружности. В следующих задачах можно использовать аналогичные наблюдения.



**7.13.** а) Доказать, что диаметрально противоположные точки  $M_1$  и  $M_2$  окружности радиуса  $2R/3$ , катящейся изнутри по окружности радиуса  $R$ , описывают одну и ту же кривую Штейнера. ↓

б) Доказать, что три точки  $M_1, M_2, M_3$  окружности радиуса  $3R/4$ , расположенные в вершинах равностороннего треугольника, будут описывать одну и ту же кривую — астроида, если катить эту окружность (изнутри) по окружности радиуса  $R$ .

в) Та же задача, в которой вместо  $3R/4$  стоит  $3R/2$ , вместо астоиды — нефроида (и подвижная окружность-обруч охватывает неподвижную).

Три кривые, названия которых нам здесь встретились — кривая Штейнера (её называют также *дельтоидой*), *астроида* (от *astra* — «звезда») и *нефроида* (от *perigos* — «почка») получаются здесь несколько иным образом, чем при том их определении, которое приведено на стр. 96–97.

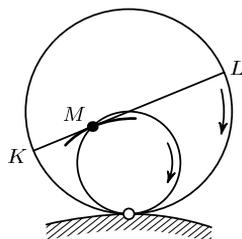
Мы уже видели на примере кардиоиды, что одну и ту же кривую можно получить как траекторию точек двух разных окружностей, катящихся по одной и той же неподвижной (сравните первое определение кардиоиды и задачу 7.7: в одном случае центром подвижной окружности служит вершина  $P$  шарнирного параллелограмма  $OPQM$ , в другом — его вершина  $Q$ ). Следующая задача указывает, какие в общем случае должны быть соотношения между радиусами окружностей, чтобы траектории получались конгруэнтными.

**7.14\*.** а) Доказать, что точка круга радиуса, катящегося снаружи по неподвижному кругу радиуса  $R$ , и точка обруча, радиуса  $R + r$ , охватывающего круг, описывают конгруэнтные траектории.

б) Доказать, что точка круга радиуса  $r$ , катящегося изнутри по окружности радиуса  $R$ , и точка круга радиуса  $R - r$  описывают конгруэнтные траектории. ↓

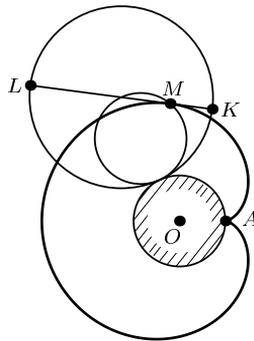
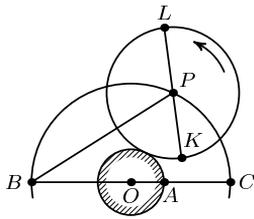
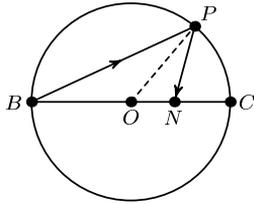
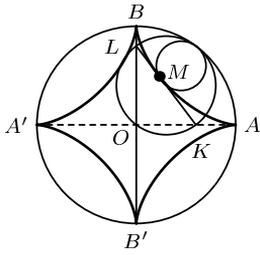
Для решения этих задач нужно научиться вычислять соотношения скоростей сложных вращений. Как это делать, мы обсудим ниже, а сейчас перейдём к самым интересным свойствам циклоидальных кривых, а именно, к свойствам их касательных.

**Теорема о двух кругах.** Сформулируем любопытное правило, позволяющее наглядно описать семейство касательных к траектории точки  $M$  окружности радиуса  $r$ , катящейся без скольжения по некоторой линии  $\gamma$ . Покатим по той же линии  $\gamma$  окружность радиуса  $2r$  вместе с её диаметром  $KL$  (жёстко скреплённым с этой окружностью), причём диаметр выберем так, что в некоторый момент времени его конец  $K$  и точка  $M$  попадают в одну и ту же точку  $A$  линии  $\gamma$ . Оказывается, что тогда в любой момент времени диаметр  $KL$  касается траектории точки  $M$ . Другими словами, эта траектория служит огибающей всех положений диаметра  $KL$ .



Это удобное правило мы и назвали *теоремой о двух кругах*. О её доказательстве мы поговорим ниже, а сейчас ограничимся следующим её уточнением. Если катить две окружности, о которых идёт речь в теореме, одновременно — так, что точки их соприкосновения с кривой  $\gamma$  всё время совпадают, то меньшая окружность будет катиться по большей без скольжения. Тогда, по теореме Коперника, точка  $M$  будет двигаться по фиксированному диаметру  $KL$  большей окружности. А наша теорема о двух кругах утверждает, что прямая  $KL$  будет касательной, проведённой в точке  $M$ , к траектории этой точки.

Перейдём к примерам. Начнём с семейства прямых, о котором мы уже говорили во введении к книге. Пусть окружность радиуса  $r$  с отмеченной точкой  $M$  катится изнутри по окружности радиуса  $R = 4r$ . Покатим вместе с ней окружность радиуса  $2r$  вместе с её диаметром  $KL$  (в начальный момент точки  $K$  и  $M$



совпадают с точкой  $A$  неподвижной окружности). По теореме Коперника концы диаметра  $KL$  скользят по двум взаимно перпендикулярным диаметрам  $AA'$  и  $BB'$  неподвижной окружности. В то же время, по теореме о двух кругах, диаметр  $KL$  при своём движении касается траектории точки  $M$ , т. е. *огibaющей прямой*  $KL$  служит *астроида с острьями в точках*  $A, B, A', B'$ .

Следующая задача — про кардиоиду.

**7.15\*.** На окружности дана точка  $B$ . Из неё в произвольную точку окружности попадает луч света и отражается от окружности (угол падения равен углу отражения). Доказать, что огibaющая отражённых лучей — кардиоида.

□ Обозначим через  $O$  центр данной «зеркальной» окружности, через  $C$  — её точку, диаметрально противоположную  $B$ . Пусть луч  $BP$  после отражения в точке  $P$  попадает в точку  $N$  отрезка  $BC$  (мы считаем пока, что  $\angle PBC \leq 45^\circ$ ). Тогда  $\angle PNC = \angle BPN + \angle PBN = 3\angle PBC$ . Значит, если луч  $BP$  вращать с угловой скоростью  $\omega$ , то отражённый луч будет вращаться с угловой скоростью  $3\omega$ , причём точка отражения  $P$  будет двигаться по зеркальной окружности с угловой скоростью  $2\omega$  («теорема о колечке» из § 1). Ясно, что это соотношение сохранится и при  $\angle PBC > 45^\circ$ .

Интересующее нас семейство прямых  $PN$  можно получить следующим образом. Покажем по неподвижной окружности радиуса  $r = |OB|/3$  с центром  $O$  окружность радиуса  $2r$  вместе с диаметром  $KL$ , в начальный момент расположенным на прямой  $BC$ . Если центр  $P$  этой окружности движется (по окружности радиуса  $3r$  с центром  $O$ ) с угловой скоростью  $2\omega$ , то диаметр  $KL$  будет вращаться с угловой скоростью  $3\omega$  (?) — так, как отражённый луч.

По теореме о двух кругах огibaющей семейства прямых  $KL$  будет траектория точки  $M$  окружности радиуса  $r$ , катящейся по окружности того же радиуса  $r$  с центром  $O$ , т. е. кардиоида; в начальный момент точка  $M$  совпадает с точкой  $A$ , делящей отрезок  $BC$  в отношении  $2 : 1$ , — эта точка и будет остриём кардиоиды. □

Это «остриё» в виде светлого пятна, образуемого отражёнными лучами, мы нередко можем видеть на дне чашки или кастрюли, расположенной наклонно по отношению к падающим лучам лампы или солнца. Правда, в таком опыте падающий пучок лучей более естественно считать параллельным, а не исходящим из точки окружности. Тогда в ответе получится не кардиоида, а другая кривая с похожим остриём. Она нам тоже знакома.

**7.16\*.** Доказать, что если на зеркало, имеющее форму полуокружности, падает параллельный пучок лучей (как показано на рисунке), то отражённые лучи касаются половины нефроиды.

Если бы зеркало было параболическим, то, как мы знаем из § 6, лучи после отражения собрались бы в одной точке — фокусе параболы. Это сопоставление объясняет другое название нефроиды: *фокальная линия круга*.

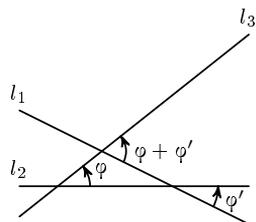
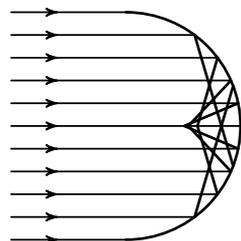
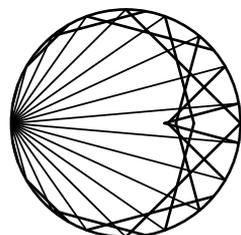
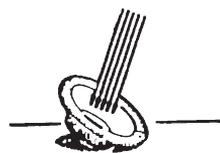
**7.17.** Найти множество точек, которое замечает фиксированный диаметр круга радиуса  $r$ , катящегося

- по окружности радиуса  $r$  снаружи;
- по окружности радиуса  $3r/2$  изнутри.

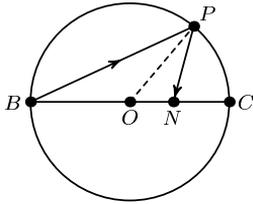
Ещё несколько интересных задач о семействах касательных появятся ниже — после того, как мы обсудим кинематические соображения, используемые в решениях последних задач и в обосновании теоремы о двух кругах.

**Скорости и касательные.** Для определения отношений угловых скоростей в сложных вращениях, которые нам встречались, существуют более удобные способы, чем тот, довольно кустарный, которым мы действовали в решении задачи 7.4. Прежде всего, это — правило сложения угловых скоростей, аналогичное правилу сложения (линейных) скоростей при переходе в новую систему отсчёта.

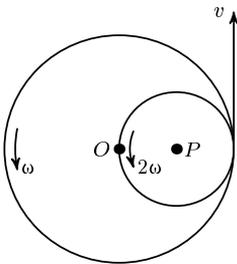
Условимся углы (и угловые скорости), соответствующие вращению против часовой стрелки, считать положительными, а по часовой стрелке — отрицательными. Тогда, если прямая  $l_2$  повёрнута относительно прямой  $l_1$  на угол  $\varphi'$ , а  $l_3$  относительно  $l_2$  — на угол  $\varphi$ , то  $l_3$



повёрнута относительно  $l_1$  на угол  $\varphi + \varphi'$ . Поэтому, если фигура  $\gamma_2$  вращается относительно «неподвижной» фигуры  $\gamma_1$  с угловой скоростью  $\omega'$ , а  $\gamma_3$  относительно  $\gamma_2$  — со скоростью  $\omega$ , то  $\gamma_3$  вращается относительно  $\gamma_1$  со скоростью  $\omega + \omega'$ . (Поскольку у нас речь идёт в основном о вращении кругов, будем считать, что на каждом из них отмечен некоторый радиус, чтобы удобнее было следить за их вращением.)



Покажем, как применять это правило. Рассмотрим сначала два круга радиуса  $r$ , центры которых закреплены на расстоянии  $2r$  друг от друга. Если круги вращаются без проскальзывания, то угловые их скорости равны по величине и противоположны по знаку: у первого, скажем,  $-\omega$ , у второго  $\omega$ . Действительно, линейные скорости соприкасающихся точек одного и другого круга равны (именно здесь используется тот факт, что круги не проскальзывают). Поскольку величина  $v$  линейной скорости точки  $M$ , находящейся на расстоянии  $r$  от центра круга, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , равна  $v = \omega r$ , то из равенства линейных скоростей в нашем случае получается равенство угловых скоростей кругов (по абсолютной величине). Теперь перейдём в систему отсчёта, связанную с первым кругом. Тогда ко всем угловым скоростям нужно добавить  $\omega$ : скорость первого будет 0, второго —  $2\omega$ . Это мы уже видели в задаче 7.4.



Ещё пример. Пусть расстояние между (неподвижными пока) центрами  $O$  и  $P$  двух касающихся окружностей радиусов  $R = 2r$  и  $r$  равно  $r$ . Их угловые скорости соответственно будут равны  $\omega$  и  $2\omega$  (отношение их величин обратно пропорционально отношению радиусов). В системе отсчёта, связанной с большей окружностью, их угловые скорости:  $-\omega$  и 0 (это — движение, о котором говорится в теореме Коперника 0.3). В системе отсчёта, связанной с меньшей окружностью, их угловые скорости 0 и  $\omega$  (задача 7.7).

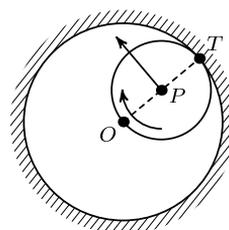
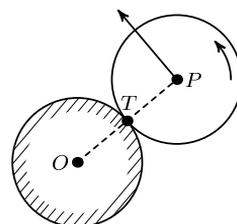
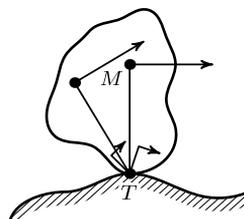
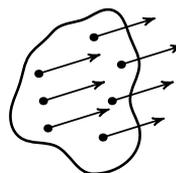
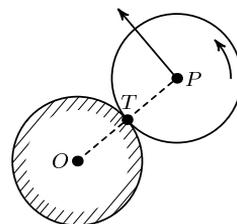
Можно, однако, при определении угловых скоростей обойтись и без введения вращающейся системы отсчёта. Но для этого придётся выяснить, как находить (линейные) скорости то-

чек катящегося колеса. Этот вопрос будет очень важен для нас в следующем пункте, где речь пойдёт о касательных к циклоидальным кривым. Итак, вернёмся к первому примеру: рассмотрим некоторое положение круга радиуса  $r$ , катящегося по кругу того же радиуса; обозначим здесь через  $T$  ту точку подвижного круга, которая в рассматриваемый момент времени совпадает с точкой касания кругов. Её скорость равна нулю (раз качение происходит без скольжения). Как же найти скорости остальных точек?

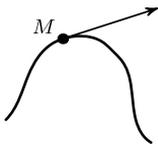
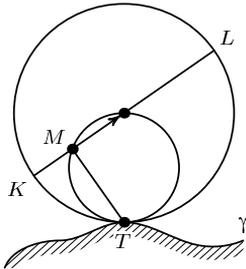
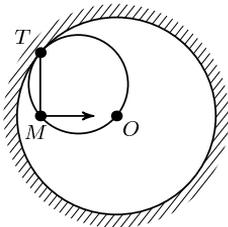
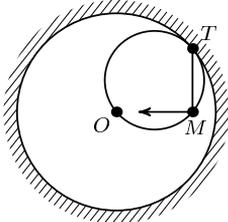
Для этого мы воспользуемся следующей теоремой Моцци: в любой момент времени скорости различных точек твёрдой пластинки, движущейся по плоскости, либо таковы, как у поступательно движущегося тела, т. е. все равны по величине и направлению, либо таковы, как у вращающегося тела, т. е. скорость некоторой точки  $T$  равна нулю, а скорость любой другой точки  $M$  равна по величине  $|MT|\omega$  (где  $\omega$  — угловая скорость пластинки) и направлена перпендикулярно отрезку  $MT$ . Именно этот последний случай имеет место для катящегося круга, причём роль точки  $T$  — «мгновенного центра вращения» — играет точка касания. (Это будет верно даже для кривого колеса, катящегося по ухабистой дороге.) Пользуясь этим, найдём отношение угловой скорости  $\omega_1$  катящегося колеса к угловой скорости  $\omega_2$ , с которой его центр  $P$  вращается вокруг центра  $O$  неподвижного круга. Для этого выразим двумя способами линейную скорость точки  $P$ : с одной стороны, её величина равна  $2r\omega_2$ , с другой, поскольку  $T$  — мгновенный центр, она равна  $r\omega_1$ . Итак,  $2r\omega_2 = r\omega_1$ , откуда  $\omega_1 = 2\omega_2$ .

То же рассуждение для круга радиуса  $r$ , катящегося изнутри по окружности радиуса  $2r$  так, что его центр движется (по окружности радиуса  $r$ ) с угловой скоростью  $\omega_2 > 0$ , даёт следующее. Обозначим угловую скорость круга через  $\omega_1$  и заметим, что  $\omega_1 < 0$ . Выразив скорость точки  $P$  двумя способами, получим:  $|\omega_1 r| = |\omega_2 r|$ , откуда  $\omega_1 = -\omega_2$ .

Аналогичные рассуждения помогают и при изучении других сложных вращений.



Но для нас особенно важно то, что теорема Моцци позволяет находить направление скорости в каждой точке фигуры: скорость точки  $M$  направлена перпендикулярно к отрезку  $MT$ , соединяющему её с мгновенным центром вращения  $T$ .



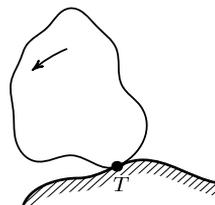
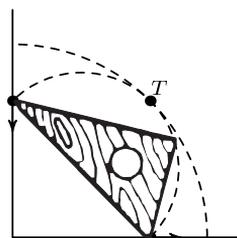
Приведём ещё одно доказательство теоремы Коперника. Пусть  $M$  — точка окружности радиуса  $r$ , катящейся изнутри по окружности радиуса  $2r$  с центром  $O$ . В любой момент скорость точки  $M$  направлена перпендикулярно отрезку  $TM$ , где  $T$  — точка соприкосновения окружностей (мгновенный центр вращения меньшей окружности). Таким образом, скорость точки всегда направлена по прямой  $MO$  (ведь  $T$  и  $O$  — диаметрально противоположные точки меньшей окружности). Следовательно,  $M$  движется по диаметру большей окружности, — в этом и состоит теорема Коперника.

Приведём доказательство теоремы о двух кругах. Покатим по кривой (или прямой)  $\gamma$  одновременно две окружности радиусов  $r$  и  $2r$ . Обозначим через  $M$  и  $K$  их точки, совпадающие в начальный момент с точкой  $A$  линии  $\gamma$ , через  $T$  — общий мгновенный центр обеих окружностей (точку соприкосновения их с  $\gamma$ ). Скорость точки направлена перпендикулярно отрезку  $MT$ . Таким образом, скорость точки  $M$  направлена по диаметру большей окружности, значит,  $M$  принадлежит определённому диаметру  $KL$  этой окружности и при своём движении прямая  $KL$  в каждый момент времени касается траектории точки  $M$ . В этом и состоит теорема о двух кругах.

Заметим, что здесь мы использовали новую точку зрения на определение касательной к кривой: касательная к траектории движущейся точки — это прямая, проходящая через точку  $M$  траектории, направление которой совпадает с направлением скорости в данной точке  $M$ .

Мы не будем приводить доказательства теоремы Моцци, но укажем её геометрический аналог: любое перемещение плоскости, которое можно осуществить, не переворачивая плоскость на другую сторону (передви-

гая её как угодно по самой себе), есть либо параллельный перенос, либо поворот вокруг некоторой точки  $T$  (теорема Шалля). В связи с теоремой Моцци подчеркнём ещё одно обстоятельство. Мгновенный центр  $T$  для самого общего движения пластинки по плоскости в процессе движения меняет своё положение и на неподвижной плоскости, и на подвижной (пластинке). И там и тут он вычерчивает некоторую кривую — одна называется *неподвижной центроидой*, другая — *подвижной центроидой*. Например, при качении колеса по дороге неподвижной центроидой будет дорога, а подвижной — обод колёса. В кинематике доказывается теорема, что для любого достаточно «хорошего» (без «рывков») движения плоскости *подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения*, причём точка касания их служит в каждый момент мгновенным центром вращения. Таким образом, самое общее движение пластинки по плоскости сводится к качению (кривого) колеса по (ухабистой) дороге. А тему нашего параграфа можно с этой точки зрения сформулировать так: мы изучаем такие движения, при которых обе центроиды — окружности.

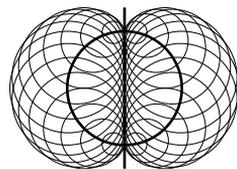


На этом закончим небольшой экскурс в кинематику<sup>1)</sup>: теперь мы достаточно вооружены, чтобы приступить к выявлению самых замечательных свойств циклоидальных кривых, связанных с семействами касательных к этим кривым.

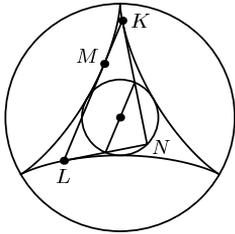
**7.18.** Доказать, что касательные к кардиоиде, проведённые в концах хорды, проходящей через остриё кардиоиды, взаимно перпендикулярны, а точка их пересечения удалена от центра неподвижной окружности на расстояние  $3r$ , где  $r$  — радиус этой окружности. ↓

**7.19\*.** По окружности равномерно двигаются два пешехода  $P$  и  $Q$ , отношение угловых скоростей которых равно  $k$  ( $k$  отлично от  $0$ ,  $1$  и  $-1$ ). Найти огибающую всех прямых  $PQ$ . ↓

**7.20\*.** Даны окружность и прямая, проходящая через её центр. Доказать, что объединение всех окружностей с центрами на данной окружности, касающихся данной прямой, есть область, ограниченная нефроидой.



<sup>1)</sup> Более подробные и точные объяснения можно найти в любом учебнике по теоретической механике, например в прекрасных «Лекциях по теоретической механике» бельгийского математика Ш. Ж. Валле Пуссена, М., ИЛ, 1948.

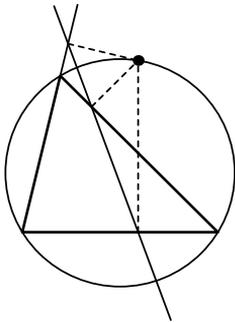


**7.21\***. Рассмотрим кривую Штейнера, описанную около окружности радиуса  $2r$ . Доказать, что любая касательная к этой кривой (в некоторой точке  $M$ ) пересекает эту кривую в двух точках  $K$  и  $L$  таких, что отрезок  $KL$  имеет постоянную длину  $4r$ , его середина лежит на данной вписанной окружности, касательные в точках  $K$  и  $L$  к кривой взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке  $N$ , лежащей на вписанной окружности, причём отрезки  $KN$  и  $LN$  делятся вписанной окружностью пополам. ↓

**7.22\***. Рассмотрим астроиду, описанную около окружности радиуса  $2r$ . Доказать, что из любой точки вписанной окружности  $P$  можно провести такие три прямые  $PT_1$ ,  $PT_2$ ,  $PT_3$ , касательные к астроиде, что они образуют друг с другом одинаковые углы (по  $60^\circ$ ), три точки касания  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса  $3r$ , касающуюся окружности, описанной около астроиды.

Следующая, последняя задача из этой серии, также допускающая решение на языке движений, выявляет неожиданную связь между элементарной геометрией треугольника и циклоидальной кривой, носящей имя геометра, открывшего эту связь.

**7.23\***. Дан треугольник  $ABC$ . Доказать, что



а) основания трёх перпендикуляров, опущенных из некоторой точки описанной окружности этого треугольника на прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , лежат на одной прямой («*прямой Симсона*»);

б) середины сторон треугольника, основания его высот, а также середины отрезков высот, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности («*окружности девяти точек*»);

в) все прямые Симсона треугольника  $ABC$  касаются одной кривой Штейнера, описанной около окружности девяти точек. ↓

**Параметрические уравнения.** Все свойства циклоидальных кривых можно было бы доказы-

вать и аналитически. Удобнее всего записать их уравнения в параметрической форме, выразив координаты  $(x; y)$  точки  $M$  через параметр  $t$  (время). С такими уравнениями мы уже встречались в задаче **6.22**.

Рассмотрим траекторию движения четвёртой вершины  $M$  шарнирного параллелограмма  $OPMQ$ , у которого вершина  $O$  находится в начале координат. (Заметим, что  $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ .) Если точка  $P$  двигается по окружности радиуса  $r_1$  с центром в начале координат  $O$  с угловой скоростью  $\omega_1$ , точка  $Q$  — по окружности радиуса  $r_2$  с центром  $O$  с угловой скоростью  $\omega_2$ , то в момент времени  $t$  координаты  $P$  будут  $(r_1 \cos \omega_1 t; r_1 \sin \omega_1 t)$ , координаты  $Q$  —  $(r_2 \cos \omega_2 t; r_2 \sin \omega_2 t)$ , а координаты четвёртой вершины  $M$  параллелограмма  $OPMQ$ :

$$x = r_1 \cos \omega_1 t + r_2 \cos \omega_2 t,$$

$$y = r_1 \sin \omega_1 t + r_2 \sin \omega_2 t$$

(в начальный момент  $t = 0$  обе стороны  $OP$  и  $OQ$  шарнирного параллелограмма направлены по оси  $Ox$ ). Мы выяснили в задаче **6.22**, что при  $\omega_2 = -\omega_1$  точка  $M$  описывает эллипс. В общем случае, если выполняются соотношения

$$\omega_1/\omega_2 = k, \quad r_2/r_1 = |k|,$$

точка  $M$  пробегает циклоидальную кривую (которую мы на стр. 96 назвали  $k$ -циклоидой).

Из параметрических уравнений, исключив  $t$ , мы получим в некоторых случаях простые уравнения, связывающие координаты  $x$  и  $y$ . Рассмотрим для примера астроиду. Для неё  $r_1 = 3r_2$ ,  $\omega_2 = -3\omega_1$ ; мы можем принять  $\omega_1 = 1$ , тогда  $\omega_2 = -3$ , и параметрические уравнения астроиды запишутся так ( $r_2 = r$ ):

$$x = 3r \cos t + r \cos 3t, \quad y = 3r \sin t - r \sin 3t,$$

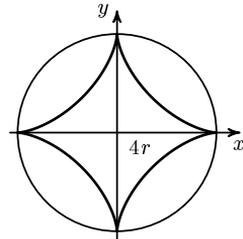
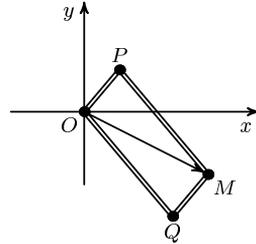
или, ещё проще (?):

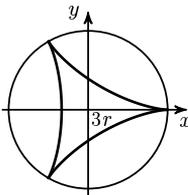
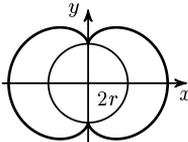
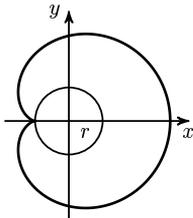
$$x = 4r \cos^3 t, \quad y = 4r \sin^3 t.$$

Отсюда вытекает такое короткое уравнение астроиды:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (4r)^{2/3}.$$

Астроиду и другие кривые, которые мы рассматривали выше, можно задать алгебраическими уравнениями. Попробуйте проверить,





что точки  $(x; y)$  этих кривых удовлетворяют таким уравнениям:

$$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 + 108r^2x^2y^2 = 0$$

(астроида),

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0$$

(кардиоида),

$$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 - 108x^2r^4 = 0$$

(нефроида),

$$(x^2 + y^2 + 9r^2)^2 + 8rx(3y^2 - x^2) - 108r^4 = 0$$

(кривая Штейнера).

Таким образом, астроида и нефроида — кривые шестого порядка, кардиоида и кривая Штейнера — четвёртого.

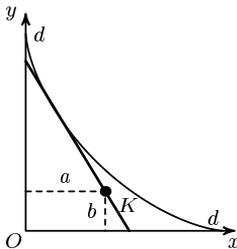
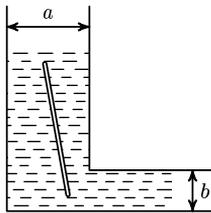
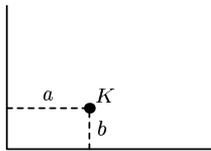
Можно доказать, что при рациональном  $\omega_1/\omega_2 = k$  циклоидальные кривые являются алгебраическими, а при иррациональном  $k$  — нет; такая кривая проходит сколь угодно близко от любой точки кольца с центром  $O$ , ограниченного окружностями радиусов  $r_1 + r_2$  и  $|r_1 - r_2|$ , — как говорят, «всюду плотно» заполняет это кольцо).

Сопоставляя уравнения кривых с их геометрическими свойствами, можно получить новые интересные следствия. Вот один пример, в котором используется свойство астроиды.

**7.24.** а) Дан прямой угол и внутри него — точка  $K$ , находящаяся на расстояниях  $a$  и  $b$  от его сторон. Можно ли через точку  $K$  провести отрезок длины  $d$  с концами на сторонах угла?

б) Канал, берега которого — параллельные прямые, поворачивает под прямым углом, причём до поворота его ширина  $a$ , а после поворота —  $b$ . При каком  $d$  через такой поворот может проплыть тонкое бревно длины  $d$ ?

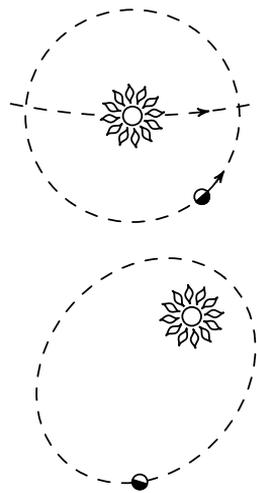
□ а) Примем стороны угла за оси координат. Отрезок длины  $d$  должен касаться астроиды, острия которой удалены от центра на расстояние  $d$ . Уравнение такой астроиды:  $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$ . Если точка  $K$  находится внутри области, ограниченной астроидой и сторонами угла, то нужный отрезок существует (это — отрезок касательной к астроиде, проведённой из точки  $K$ ), если  $K$  лежит вне этой области — то нет. Таким образом, нужный отрезок существует в том и только в том случае, если  $a^{2/3} + b^{2/3} \leq d^{2/3}$ . □



Заметим, что хотя мы объяснили, как при выполнении условия  $a^{2/3} + b^{2/3} \leq d^{2/3}$  «построить» нужный отрезок с помощью астроиды, эта задача неразрешима с помощью циркуля и линейки.

Замечательные кривые, с которыми мы познакомились в последних двух параграфах, известны уже более 20 веков. Основные свойства эллипсов, гипербол и парабол были описаны в сочинении «О конических сечениях» древнегреческого математика Аполлония Пергского, жившего почти в одно время с Евклидом (III век до н. э.). Изучением траекторий сложных круговых движений ещё в древности занимались астрономы, и это неудивительно: если в довольно грубом приближении считать, что планеты вращаются вокруг Солнца по окружностям в одной и той же плоскости, то наблюдаемое с Земли движение другой планеты будет как раз сложным круговым движением. Описание планетарных движений с помощью сложных циклоидальных кривых по мере накопления астрономических наблюдений обростало всё большим числом поправок до тех пор, пока Иоганн Кеплер не установил, что траектории планет с большой точностью — эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Разнообразные задачи из физики, механики и математики, связанные с конкретными кривыми, послужили пробным камнем для мощных аналитических методов, созданных в XVII веке Декартом, Лейбницем, Ньютоном, Ферма и другими учёными. Эти методы дали возможность перейти от частных задач, связанных с замечательными кривыми, к общим закономерностям, присущим целым классам кривых. Разумеется, рассчитывая сложные механизмы и конструкции, нельзя обойтись без аналитических методов. Однако наглядные представления, которым посвящена эта книга, бывают полезны, причём даже в задачах, никак не связанных с геометрией: недаром результаты исследований или вычислений часто представляют в виде графиков или семейства линий.



## Ответы, указания, решения

**1.13.** Заметим, что вершины  $M$  прямоугольных треугольников  $AMB$  с гипотенузой  $AB$  принадлежат окружности с диаметром  $AB$ .

**1.14.** Через точку  $M$  касания окружностей проведём общую касательную. Пусть она пересекает прямую  $AB$  в точке  $O$ . Тогда  $|AO| = |OB| = |OM|$  (длины касательных, проведённых из точки  $O$  к окружностям, равны).

**1.15. Ответ:** объединение трёх окружностей. Пусть  $A, B, C$  и  $D$  — данные точки. Проведём через точку  $A$  прямую  $l$ , через точку  $C$  прямую, параллельную  $l$ , а через точки  $B$  и  $D$  прямые, перпендикулярные к  $l$ . В результате построим прямоугольник.

Пусть  $L$  — середина отрезка  $AC$ ,  $K$  — середина отрезка  $BD$ ; тогда легко видеть, что  $\angle LMK = 90^\circ$ , где  $M$  — центр прямоугольника. Вращая прямую  $l$  вокруг точки  $A$  и соответственно остальные прямые, мы получаем, что множество центров  $M$  построенных прямоугольников — окружность с диаметром  $KL$ .

Поскольку четыре точки  $A, B, C, D$  можно разбить на две пары тремя способами:  $(A, B)$  и  $(C, D)$ ;  $(A, C)$  и  $(B, D)$ ;  $(A, D)$  и  $(B, C)$ , то всё искомое множество состоит из трёх окружностей.

**1.25. Ответ:** по прямой. Если пешеходы  $P$  и  $Q$  двигаются по параллельным прямым, то ясно, что середина отрезка  $PQ$  движется тоже по параллельной прямой.

Пусть прямые пересекаются в точке  $O$ . Возьмём точку  $O$  за начало отсчёта. Тогда скорости  $v_1$  и  $v_2$  пешеходов — это векторы, направлены соответственно вдоль прямых, а их величина равна длине пути, проходимого пешеходом за единицу времени. Пусть первый пешеход находится в момент времени  $t$  в точке  $P$ , второй — в точке  $Q$ , тогда  $\vec{OP} = \vec{a} + tv_1$  и  $\vec{OQ} = \vec{b} + tv_2$  (векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  определяют начальные положения пешеходов при  $t = 0$ ).

Середина  $M$  отрезка  $PQ$  находится, естественно, в точке  $M$  такой, что

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + t \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

Мы видим, что она тоже движется по некоторой прямой равно мерно со скоростью  $\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$ . Для того чтобы найти эту прямую, достаточно отметить середину начальных положений пешеходов и их положений, скажем, через единицу времени.

Можно заменить вычисления с векторами таким геометрическим рассуждением.

Если  $P_0P_1$  и  $Q_0Q_1$  — любые два (непараллельные) отрезка, то отрезок  $M_0M_1$ , где  $M_0$  и  $M_1$  — середины отрезков  $P_0Q_0$  и  $P_1Q_1$ , является медианой треугольника  $L_1M_0N_1$ , где  $L_1$  и  $N_1$  — четвёртые вершины параллелограммов  $P_1P_0M_0L_1$  и  $Q_1Q_0M_0N_1$  (см. рис. 1; при описанном построении  $P_1L_1Q_1N_1$  — параллелограмм,  $P_1Q_1$  и  $N_1L_1$  — его диагонали).

Теперь ясно, что если вместо  $P_1$  и  $Q_1$  взять на прямых  $Q_0Q_1$  и  $P_0P_1$  такие точки  $P$  и  $Q$ , для которых  $\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{P_0P_1}$  и  $\overrightarrow{Q_0Q} = t\overrightarrow{Q_0Q_1}$ , и так же, как раньше, построить треугольник  $LM_0N$  (с медианой  $M_0M$ ), то этот треугольник получится просто гомотетией с коэффициентом  $t$  и центром  $M_0$  из треугольника  $N_1M_1L_1$  (с медианой  $M_0M_1$ ), т. е. точка  $M$  будет лежать на прямой  $M_0M_1$ , причём  $\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{M_0M_1}$ .

**1.28.** Воспользуемся рис. 1 к решению **1.25**. Если отрезки  $P_0P_1$  и  $Q_0Q_1$  равномерно вращаются вокруг точек  $P_0$  и  $Q_0$  с одинаковой угловой скоростью (1 оборот в час), то и треугольник  $N_1M_0L_1$  вместе со своей медианой  $M_0M_1$  вращается как жёсткое целое вокруг точки  $M_0$  с той же угловой скоростью.

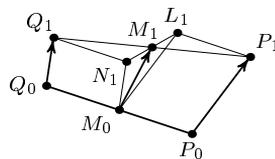


Рис. 1

**1.29.** *Ответ:* окружность. Переведём эту задачу на язык движений. Проведём радиусы  $O_1K$  и  $O_2L$ . Пусть прямая  $KL$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Тогда по теореме «о колечке» радиусы  $O_1K$  и  $O_2L$  будут равномерно вращаться с одной и той же угловой скоростью  $2\omega$ , т. е. величина угла между радиусами  $O_1K$  и  $O_2L$  остаётся постоянной. Тем самым задача сводится к предыдущей.

**2.11.** б) Воспользуйтесь **Е**.

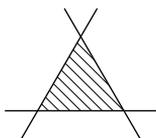


Рис. 2

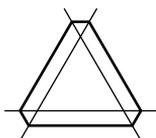


Рис. 3

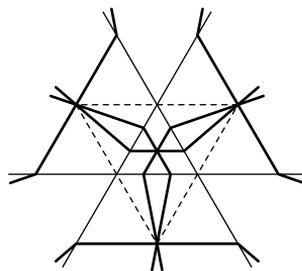


Рис. 4

**2.19.** а) *Ответ:* если  $h$  — длина высоты треугольника  $ABC$ , то искомое множество при  $\mu < h$  пусто, при  $\mu = h$  — весь треугольник (рис. 2), при  $\mu < h$  — контур шестиугольника (рис. 3).

**2.20.** б) См. рис. 4.

**3.5.** б) Эта задача сводится к **3.5.** а), а также просто решается «выходом в пространство»: если на данных окружностях (в горизонтальной плоскости  $\alpha$ ) построить три сферы с центрами в плоскости  $\alpha$  и посмотреть на них сверху, то мы увидим три окружности, по которым пересекаются сферы (их проекции на горизонтальную плоскость — наши три хорды), и точку их пересечения (её проекция — нужная нам точка пересечения хорд).

**3.7.** б) Заметим, что  $\angle AMB = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$ , где  $M$  — центр вписанной в треугольник окружности. Согласно **Д** множество точек  $M$  — пара дуг с концами  $A, B$ .

в) *Ответ:* искомое множество — пара дуг. (См. рисунки 5, а, б, в, соответствующие случаям а)  $\varphi < 90^\circ$ , б)  $\varphi = 90^\circ$ , в)  $\varphi > 90^\circ$ .)

Пусть  $l_A$  и  $l_B$  — пересекающиеся прямые, проходящие через точки  $A$  и  $B$  соответственно, и пусть  $k_A$  и  $k_B$  — прямые, тоже проходящие через точки  $A$  и  $B$ , причём  $k_A \perp l_B$ ,  $k_B \perp l_A$ . Если прямые  $l_A$  и  $l_B$  вращаются вокруг своих точек  $A$  и  $B$ , то прямые  $k_A$  и  $k_B$  также равномерно вращаются вокруг своих точек  $A$  и  $B$  с той же угловой скоростью. Согласно **Д** точка пересечения прямых  $k_A$  и  $k_B$  движется по окружности.

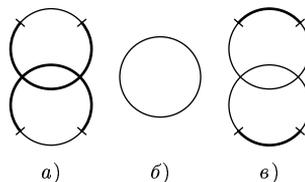


Рис. 5

Заметим, что когда точка пересечения прямых  $l_A$  и  $l_B$  пробегает дугу окружности  $\gamma$ , точка пересечения прямых  $k_A$  и  $k_B$  также пробегает дугу окружности, симметричной окружности  $\gamma$  относительно прямой  $AB$ .

**3.8, а)** Пусть  $a, b, c$  — прямые, проходящие через точки  $A, B, C$  соответственно;  $K, L, M$  — точки пересечения прямых  $a$  и  $b, b$  и  $c, a$  и  $c$  соответственно. Согласно пункту  $D^\circ$  азбуки точка  $K$  пробегает окружность с хордой  $AB$ , а точка  $L$  — окружность с хордой  $BC$ . Пусть  $H$  — точка пересечения этих окружностей, отличная от  $B$ .

Когда при своём вращении прямая  $b$  (прямая  $KL$ ) проходит через точку  $H$ , то точки  $K$  и  $L$  совпадают с  $M$ , поэтому прямые  $a$  и  $c$  тоже проходят через  $H$ . (Особые случаи, когда эти две окружности касаются в точке  $B$  или совпадают, нужно рассмотреть отдельно. В первом из них — точка  $M$  совпадает с  $B$ , во втором — точки  $K, L$  и  $M$  всё время совпадают: «можно надеть на все прямые  $a, b$  и  $c$  одно колечко».)

Заметим кстати, что при этом вращении треугольник  $KLM$  остаётся подобным самому себе, когда все прямые пересекаются в точке  $H$ , он вырождается в точку, а наибольшего размера достигает, когда  $a, b$  и  $c$  перпендикулярны соответственно прямым  $AH, BH$  и  $CH$ : в этот момент его вершины занимают положения, диаметрально противоположные точке  $H$  на своих траекториях (окружностях).

б) Пусть прямые  $AH, BH$  и  $CH$  начали вращаться с одинаковой угловой скоростью ( $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ) вокруг точек  $A, B$  и  $C$ . Тогда точка пересечения каждой пары прямых описывает одну из окружностей, о которых говорится в условии.

**3.9.** Рассмотрим три множества точек  $M$ , лежащих внутри треугольника

$$\left\{ M: \frac{S_{AMB}}{S_{BMC}} = k_1 \right\}, \quad \left\{ M: \frac{S_{BMC}}{S_{AMC}} = k_2 \right\}, \quad \left\{ M: \frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = k_3 \right\}.$$

Эти три отрезка (см. **К**) пересекаются в одной точке в том и только в том случае, если  $k_1 k_2 k_3 = 1$ .

**3.10.** Рассмотрите три множества

$$\{M: |MA|^2 - |MB|^2 = h_1\}, \quad \{M: |MB|^2 - |MC|^2 = h_2\}, \quad \{M: |MC|^2 - |MA|^2 = h_3\}.$$

Эти три прямые (см. **Е**) пересекаются в одной точке в том и только в том случае, если  $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ .

**3.19.** Рассмотрите для каждой из  $n$  данных точек  $C_i$  множество точек, находящихся от  $C_i$  на расстоянии не больше  $1/\sqrt{\pi n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**3.21.** Нарисуйте множество концов  $M$  всевозможных векторов

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE}_1 + \overrightarrow{OE}_2 + \dots + \overrightarrow{OE}_n$$

(где  $\overrightarrow{OE}_i$  — единичные векторы, о которых говорится в условии) сначала для  $n = 1$ , потом для  $n = 2$  и так далее (рис. 6).

**4.4.** *Ответ:* наименьшее расстояние между пешеходами равно  $\frac{du}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ .

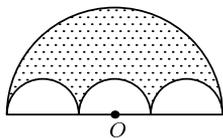


Рис. 6

Пусть первый пешеход  $P$  идёт со скоростью  $\vec{u}$ , второй пешеход  $Q$  — со скоростью  $\vec{v}$  (длины  $u$  и  $v$  этих векторов известны). Рассмотрим относительное движение  $P$  в системе отсчёта, связанной с  $Q$  — это будет равномерное движение с постоянной скоростью  $\vec{u} - \vec{v}$  (см. **1.3**).

В «начальном» положении, когда  $P$  находится в точке  $P_0$  пересечения дорог,  $Q_0$  находится от  $P_0$  на расстоянии  $|Q_0 P_0| = d$  в направлении вектора  $-\vec{v}$ . Таким образом, чтобы найти ответ, достаточно через точку  $P_0$  провести прямую  $l$ , параллельную вектору  $\vec{u} - \vec{v}$  (это — траектория  $P$  в относительном движении в системе отсчёта, связанной с  $Q$ ) и определить расстояние  $|Q_0 H|$  от точки  $Q_0$  до прямой  $l$  ( $H$  — проек-

ция  $Q_0$  на  $l$ ). Поскольку треугольник  $Q_0P_0H$  подобен треугольнику, составленному из векторов  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{u} - \vec{v}$  ( $(Q_0P_0) \perp \vec{u}$ ,  $(Q_0H) \perp (\vec{u} - \vec{v})$ ), то

$$\frac{|Q_0H|}{|Q_0P_0|} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u} - \vec{v}|} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

**4.6.** Опустим из центра  $O_1$  одной из окружностей перпендикуляр  $O_1N$  на секущую  $l$ , проходящую через точку  $A$ , и из центра  $O_2$  другой окружности — перпендикуляр  $O_2M$  на прямую  $O_1N$ . Тогда длина  $|O_2M|$  вдвое меньше расстояния между точками пересечения секущей  $l$  с окружностями (отличными от  $A$ ).

**4.9. Ответ:** равнобедренный треугольник. Воспользуйтесь **2.8а**.

**5.4, б)** Докажите, что если отрезок  $KL$  постоянной длины скользит концами по сторонам данного угла  $A$ , то точка  $M$  пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках  $K$  и  $L$  к сторонам  $KA$  и  $LA$  угла, движется по окружности с центром  $A$  (вспомните обсуждение теоремы Коперника **0.3** во введении).

**5.7.** Построить эти точки помогает тот факт, что линии уровня функции  $f(M) = |AM|/|MB|$  ортогональны окружностям, проходящим через точки  $A$  и  $B$  (стр. 64).

**6.3, д) Ответ:** гипербола, если данные окружности расположены вне друг друга (быть может, касаясь); объединение гиперболы и эллипса, если пересекаются; эллипс, если одна окружность расположена внутри другой (быть может, касаясь). Фокусы кривых находятся в центрах данных окружностей.

Уменьшить перебор различных случаев расположения третьей окружности по отношению к первым двум помогает такое общее правило: окружности радиусов  $r$  и  $R$  с центрами на расстоянии  $d$  касаются, если  $R + r = d$  или  $|R - r| = d$ .

**6.12, а)** Вместе с данной касательной (и перпендикулярами к ней) постройте, симметричную ей относительно центра эллипса.

Используйте **6.9, б)** и теорему о том, что произведение отрезков хорды, проведённой через данную точку внутри окружности не зависит от направления хорды.

**6.15.** Постройте в случае а) эллипс (в случае б) гиперболу) с фокусами  $A$  и  $B$ , касающийся первого звена  $P_0P_1$ , и докажите, что и второе звено  $P_1P_2$  его коснётся. Для этого воспользуйтесь тем, что  $\triangle A'P_1B = \triangle AP_1B'$  где  $A'$  — точка, симметричная  $A$  относительно  $P_0P_1$ ,  $B'$  — точка, симметричная  $B$  относительно  $P_1P_2$ . Касательные будут медиатрисами отрезков  $AA'$  и  $BB'$  (**6.9, а)**, **6.10, а)**).

**6.16, в)** Построим множество точек  $N$ , для которых середина отрезка  $AN$  лежит на данной окружности. Это — окружность. Обозначим её центр через  $B$ , радиус — через  $R$ . Множество точек, которые расположены ближе к точке  $A$ , чем к любой точке  $N$  построенной окружности, можно представить как пересечение полуплоскостей, ограниченных медиатрисами отрезка  $AN$  и содержащих  $A$ . То же множество, можно записать так:

$$\{M : |MA| - |MB| \leq R\},$$

т. е. ограничивающая его кривая — ветвь гиперболы.

**6.17.** Сравните указание к **6.16** с доказательством фокального свойства параболы.

**6.23.** Начало координат выберите в середине отрезка  $AB$ , а направление оси  $Ox$  так, чтобы в некоторые моменты времени обе вращающиеся прямые были параллельны  $Ox$ . Если записать уравнения прямых в момент  $t$ , найти координаты точки их пересечения и затем исключить  $t$  (как в решении **6.22**), то получится уравнение гиперболы вида (4) (стр. 82).

**6.24.** Представьте себе две прямые, вращающиеся вокруг точек  $A$  и  $B$  в разные стороны так, что вторая имеет вдвое большую угловую скорость. Нетрудно догадаться, что точка их пересечения движется по кривой, похожей на гиперболу, причём асимптоты её составляют углы  $60^\circ$  с прямой  $AB$ , а точка пересечения  $C$  с отрезком  $AB$  делит его в отношении  $|AC|/|BC| = 2$ . И действительно, ответ в этой задаче: ветвь гиперболы. Геометрическое доказательство проще всего дать, сведя задачу

к пункту **Р** азбуки. Для этого нужно построить точку  $M'$ , симметричную  $M$  относительно медиатрисы  $l$  отрезка  $AB$ , и заметить, что луч  $BM'$  — биссектриса угла  $ABM$  и  $|MM'| = |MB|$ , поэтому  $|MB|/\rho(M, l) = 2$ .

**6.25.** а) Если выбрать систему координат так, чтобы стороны угла записывались уравнениями  $y = kx$  и  $y = -kx$ ,  $x \geq 0$ , то площадь треугольника  $OPQ$ , где  $P$  и  $Q$  лежат на сторонах угла, а середина отрезка  $PQ$  имеет координаты  $(x; y)$ , равна  $kx^2 - y^2/k$ .

б) Воспользуйтесь результатом задачи **1.7**, б).

в) Следует из а) и б).

**7.2.** Это объединение можно представить как множество точек  $M$ , для каждой из которых найдётся точка  $P$  окружности такая, что  $|MP| \leq |PA|$ , или как множество точек  $M$ , для которых медиатриса отрезка  $MA$  имеет общую точку с данной окружностью. Сравните эту задачу с **6.16**, **6.17**.

**7.9.** *Ответ:* а) 3; б) 4; в) 2,5. Найти отношение угловых скоростей можно так, как это сделано в примерах на стр. 101–103.

**7.13.** а) Дуга окружности радиуса  $R$ , заключённая между двумя острями кривой Штейнера ( $120^\circ$ ), имеет ту же длину, что полуокружность радиуса  $2R/3$ .

**7.14.** б) И та, и другая кривая могут быть получены как траектории вершины  $M$  шарнирного параллелограмма, длины сторон которого  $R-r$  и  $r$ , а отношение угловых скоростей  $\omega_1/\omega_2 = -r/(R-r)$  (угловые скорости имеют разные знаки, см. стр. 101).

**7.18.** Воспользуйтесь **7.7** и теоремой Моцци.

**7.19.** *Ответ:*  $k$ -циклоида (см. стр. 96).

**7.21.** Воспользуйтесь **7.13**, а), теоремой Моцци и теоремой о двух кругах.

**7.23.** Пусть  $M$  — точка описанной окружности, движущаяся по ней с угловой скоростью  $\omega$ . Тогда:

(1) точки  $M_1, M_2$  и  $M_3$ , симметричные точке  $M$  относительно прямых  $BC, CA$  и  $AB$ , двигаются по окружности (с угловой скоростью  $-\omega$ );

(2) эти три окружности пересекаются в одной точке  $H$  — ортоцентре треугольника  $ABC$  (**3.8**, б));

(3) каждая прямая  $M_iM$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вращается с угловой скоростью  $-\omega/2$  вокруг  $H$ ;

(4) три точки  $M_1, M_2, M_3$  лежат на одной прямой  $l_M$ , проходящей через  $H$  (т. е. три прямые  $M_iM$  — на самом деле одна и та же прямая  $l_M$ );

(5) середины отрезков  $MM_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и середина  $K$  отрезка  $MH$  лежат на одной прямой — прямой Симсона;

(6) точка  $K$  движется по окружности  $\gamma$ , гомотетичной описанной окружности с коэффициентом  $1/2$  и центром гомотетии  $H$ ;

(7) окружность  $\gamma$  проходит через девять точек, о которых говорится в пункте б) задачи **7.23**;

(8) огибающей прямых  $l_M$  является кривая Штейнера, касающаяся окружности  $\gamma$ .

## Приложение I

### Метод координат (основные формулы)

Как только на плоскости выбрана система координат  $Oxy$ , каждой точке плоскости ставится в соответствие пара чисел — её координаты. Соответствие между точками плоскости и парами чисел взаимно однозначно (каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел и обратно).

1. Расстояние между точками  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  находится по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

2. Множество точек  $(x; y)$ , координаты которых удовлетворяют уравнению  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  (где  $a$ ,  $b$  и  $r$  — данные числа,  $r > 0$ ) — окружность с центром в точке  $(a; b)$  радиуса  $r$ . В частности,  $x^2 + y^2 = r^2$  — уравнение, окружности радиуса  $r$  с центром в начале координат.

3. Середина отрезка между точками  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  имеет координаты

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Вообще точка, делящая отрезок  $AB$  в отношении  $p : q$  ( $p$  и  $q$  — данные положительные числа), имеет координаты

$$\left( \frac{qx_1 + px_2}{q + p}, \frac{qy_1 + py_2}{q + p} \right).$$

Эти формулы приобретают особенно простой вид, если  $p$  и  $q$  выбраны так, что  $q + p = 1$ .

4. Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению  $ax + by + c = 0$  ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  — некоторые числа, причём  $a$  и  $b$  не равны нулю одновременно, т. е.  $a^2 + b^2 \neq 0$ ) — прямая. Обратно, каждая прямая задаётся уравнением вида  $ax + by + c = 0$ . При этом числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяются для данной прямой однозначно с точностью до пропорциональности: если умножить их все на одно и то же число  $k$  ( $k \neq 0$ ), то полученное уравнение  $kax + kby + kc = 0$  будет определять ту же прямую.

Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости: множество точек  $(x; y)$ , для которых  $ax + by + c > 0$ , и множество точек  $(x; y)$ , для которых  $ax + by + c < 0$ .

5. Расстояние  $\rho(M, l)$  от точки  $M(x_0; y_0)$  до прямой  $l$ , задаваемой уравнением  $ax + by + c = 0$ , находится по формуле

$$\rho(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Эта формула приобретает особенно простой вид, если  $a^2 + b^2 = 1$ . Любое уравнение  $ax + by + c = 0$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ) прямой можно привести к такому виду, умножив его на одно из чисел  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  или  $-\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

## Некоторые факты школьной планиметрии

### I. Пропорциональные отрезки

1. *Теорема о пропорциональных отрезках.* Если на одной прямой  $l_1$  отложить несколько отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие прямую  $l_2$ , то они отсекут на прямой  $l_2$  отрезки, пропорциональные отложенным.

2. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

3. *Теорема о биссектрисе треугольника.* Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

4. *Теорема о пропорциональных отрезках в круге.* Если две хорды  $AB$  и  $CD$  окружности пересекаются в точке  $E$ , то

$$|AE| \cdot |BE| = |DE| \cdot |CE|.$$

5. *Теорема о касательной и секущей.* Если через точку  $A$ , взятую вне окружности, провести касательную  $AT$  и секущую, пересекающую окружность в точках  $B$  и  $C$ , то

$$|AT|^2 = |AC| \cdot |AB|.$$

### Примечания

1. Теорема о пропорциональных отрезках переформулирована на языке движений (стр. 17) как «теорема о колечке на прямой». Более общее утверждение, выведенное из теоремы о колечке — это лемма на стр. 34.

3. Теорема о биссектрисе треугольника доказана в задаче 2.5 (стр. 25) в несколько более общем виде — для «креста биссектрис», который определён в пункте Б азбуки (стр. 24).

5. Теорема о касательной и секущей нигде в книге прямо не фигурирует, но она тесно связана с задачами про радикальную ось (стр. 28).

### II. Расстояния. Перпендикуляры

1. Расстояние от точки  $A$  до основания перпендикуляра, проведённого через неё к прямой  $l$ , меньше, чем расстояние от  $A$  до любой другой точки прямой  $l$ .

2. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

3. Из двух наклонных, проведённых из данной точки к данной прямой  $l$ , больше та, у которой больше проекция на прямую  $l$ .

4. а) Если точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, то она равноудалена от концов отрезка.

б) Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Эти две теоремы можно сформулировать в одном предложении: множество всех точек, каждая из которых равноудалена от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.

5. а) Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла.

б) Если точка угла, меньше развёрнутого, равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе этого угла.

Из а) и б) следует, что множеством всех точек угла меньше развёрнутого, равноудалённых от его сторон, является биссектриса этого угла.

6. Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

7. Около каждого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

### Примечания

1–2. Эти утверждения могут служить простейшей иллюстрацией к принципу касания, сформулированному в § 5 (стр. 67). Пусть заданы прямая  $\gamma$  и точка  $A$ . Построим семейство концентрических окружностей — линий уровня функции  $f(M) = |AM|$ . Точка прямой  $\gamma$ , в которой достигается минимум функции  $f$ , — это точка касания одной из окружностей нашего семейства с прямой  $\gamma$ .

3–4. Общее предложение 4 — это пункт А азбуки (стр. 23). Серединный перпендикуляр, так часто встречается в книжке, что для него введён более короткий термин: *медиатриса*. Утверждение 3, по существу, содержится в тексте пункта А о разбиении на полуплоскости.

5. Более общее утверждение формулируется в пункте Б азбуки, где введён термин «крест биссектрис» (стр. 24).

6. Центр вписанной окружности определяется в задаче 3.3 (стр. 39).

7. Центр описанной окружности определяется в задаче 3.1 (стр. 38).

### III. Окружность

1. Радиус, перпендикулярный к хорде, делит её пополам.

2. *Теорема о касательных*. Если из точки  $A$  проведены к окружности две касательные  $AT_1$  и  $AT_2$  ( $T_1$  и  $T_2$  — точки касания), то  $|AT_1| = |AT_2|$ .

3. *Теорема об описанном четырёхугольнике*. В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда сумма длин его противоположных сторон равна сумме длин двух других противоположных сторон.

4. Множество всех вершин прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой  $AB$  есть окружность с диаметром  $AB$  (без точек  $A$  и  $B$ ).

5. *Теорема о вписанном угле*. Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

6. Мера угла, образованного касательной и хордой, равна половине меры дуги, расположенной внутри этого угла.

7. Мера угла с вершиной внутри круга равна полусумме мер двух дуг, из которых одна заключена между сторонами этого угла, а другая — между продолжениями сторон.

Мера угла между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равна полуразности мер большей и меньшей дуг, расположенных внутри угла.

8. *Теорема о вписанном четырёхугольнике*. Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма градусных мер двух противоположных его углов равна  $180^\circ$ .

### Примечания

4. Это утверждение обсуждается на стр. 8 в связи с задачей про котёнка.

5. Теорема о вписанном угле переформулирована на языке движений (стр. 16) как «теорема о колечке на окружности». Более общее утверждение, выведенное из теоремы о колечке, — пункт Д° азбуки.

6–7. К этим теоремам примыкает задача 2.6.

### IV. Треугольники

1. *Теорема о внешнем угле*. Величина внешнего угла треугольника равна сумме величин внутренних углов, не смежных с ним.

2. *Теорема о медианах*. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2 : 1 (считая от вершин).

3. *Теорема о высотах треугольника*. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

4. *Теорема Пифагора*. Сумма квадратов длин катетов прямоугольного треугольника равна квадрату длины гипотенузы.

5. Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

6. Площадь треугольника равна половине произведения

- а) длины основания на длину высоты,
- б) длин двух сторон на синус угла между ними.

Примечания

2–3. Доказательства этих теорем приведены на стр. 38–40 в решениях задач 3.2 и 3.4 (тот факт, что одна медиана делит другую в отношении 2 : 1, можно извлечь из решения 3.4).

## Приложение III

### Дюжина заданий

Это приложение предназначено читателям, которые, бегло ознакомившись с книжкой и попытавшись решить понравившиеся им задачи, не смогли справиться с некоторыми из них, но не потеряли желания в них разобраться и готовы систематически поработать с книгой «с карандашом в руке».

Представленные ниже двенадцать заданий пронизывают содержание книги в различных направлениях, отмечая скрытые на первый взгляд связи между разными задачами.

Задания построены примерно так, как это принято в заочной математической школе при МГУ. Вначале объясняется тема задания и перечисляются те страницы книги, теоремы, задачи, которые нужно внимательно и досконально разобрать, потом идёт список контрольных задач, причём «обязательные» задачи отделены значком || от дополнительных. К некоторым задачам даны пояснения. Что касается решений, то мы советуем постараться записывать их коротко, без излишних подробностей, ясно формулируя основные этапы решения и ссылки на теоремы из курса геометрии. Не надо забывать и о частных случаях: иногда их приходится разбирать особо (как в задаче 1.1 — случай точки  $M$ , лежащей на прямой  $AC$ , или в задаче 1.3 — случай квадрата); хотя мы не призываем читателей к излишней дотошности в выискивании и подробном разбирательстве всех вырожденных случаев, но советуем следить за тем, чтобы, как принято у математиков, результат формулировался точно и полно.

#### 1. Назовите буквы

Цель этого задания — первое знакомство с азбукой — теоремами о множествах точек, которые в дальнейшем удобно использовать при решении задач.

Просмотрите § 2 и составьте на отдельном листе перечень пунктов азбуки от А до Л из § 2: рядом с каждой буквой напишите формулу (см. стр. 36) и нарисуйте соответствующую картинку.

2.1; 2.2; 2.3; 2.4; 1.16, а), б); 5.4 а); 1.11; 1.12 || 2.13; 2.15; 2.16; 3.6.

#### Пояснения

В первых пяти задачах требуется просто привести ответ: назвать нужную букву азбуки.

Решить без вычислений задачу 5.4, а) поможет задача 1.16, а).

В задачах на «построение» дело сводится к построению некоторой точки — центра окружности и т. п. Искомая точка получается как пересечение двух азбучных множеств (см. 1.14). Нужно назвать эти множества (пункты азбуки) и указать, сколько ответов имеет задача.

Короткое решение 2.13 опирается на результат 2.12.

## 2. Преобразования и построения

В решениях задач, составляющих это задание, используются различные геометрические преобразования окружности и прямой, о которых говорится на стр. 18–19 и которые не раз встречаются в книжке (6.9, а), б); 7.1 а), б)).

1.20; 1.21; 1.22; 1.23; 1.24, а), б) || 3.7, а); 4.8, а).

Пояснения

1.20. Рассмотрите (как в 1.9) все случаи расположения точки  $A$ .

1.22. См. решение задачи 1.7, а).

1.23. См. решение задачи 1.6.

1.24, а). Укажите только ответ.

3.7, а). Используйте тот факт, что центр тяжести делит медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

4.8. Прочтите решение задачи 4.7.

Во всех этих задачах советуем фактически выполнить на чертеже все нужные построения. Записывать решение нужно коротко, обращая внимание на то, какие множества и какие преобразования используются. Указывайте, сколько решений имеет задача.

## 3. Вращающиеся прямые

Это задание касается в основном различных вариантов теоремы о вписанном угле и её следствий.

Просмотрите отдельные страницы книги в следующем порядке: задача 0.1 (про котёнка), задача 1.1, теорема о колечке на окружности (стр. 16), пункты  $D^\circ$  и  $D$  азбуки (стр. 25–26). Заметьте, что теорему о колечке (так же, как задачу про котёнка) не следует понимать в буквальном смысле: воображаемое «колечко» — просто точка пересечения прямой и окружности; если же сделать проволочную модель, то после одного оборота (в ту или другую сторону) колечко застрянет.

1.8; 1.9; 1.10; 1.13; 1.18; 2.6, а), б) || 1.27; 2.7; 2.8, б); 4.6; 7.5; 7.6.

Пояснения

1.9. Сделайте чертежи для различных расположений точки  $A$ .

1.10. Проведите через точку  $B$  одну прямую, постройте точку  $A'$ , симметричную точке  $A$  относительно этой прямой, а затем проведите отрезок  $BA'$ .

Изобразите множества точек — ответы к задачам 1.8 и 1.10 — на одном чертеже. Каким преобразованием можно получить множество 1.10 из 1.8?

1.13. Укажите, сколько решений имеет задача.

1.27. Проведите эксперимент с обычным угольником. Указание к возможному решению: опишите вокруг деревянного треугольника окружность, соедините вершины прямых углов и воспользуйтесь теоремой о вписанном угле.

2.6. Представьте себе, что подвижная хорда равномерно едет по окружности.

2.8, б). Решение аналогично 2.8, а). Подумайте над вторым вариантом решения этой задачи, который предлагается на стр. 27.

## 4. Прямые и линейные соотношения

Это задание касается задач, в которых фигурируют не кривые а только прямые.

Просмотрите отдельные страницы книги в следующем порядке: задачи 1.2 и 1.3 про «велосипед» и прямоугольник (стр. 13–15), теорему о колечке на прямой (стр. 17) и продолжающую её важную лемму (стр. 34), а также пункты  $E$ ,  $K$ ,  $L$  азбуки и общие теоремы о расстояниях до прямых и о квадратах расстояний (стр. 27–35).

1.24, а), б); 2.18; 2.19, б); 3.9; 3.14; 3.15; 3.16 || 1.26; 1.27; 2.14; 2.20, а); 3.18.

Пояснения

2.18. См. решения 2.5 и 2.17.

**2.19, б).** Надо исследовать, как зависит ответ от размеров прямоугольника  $a \times b$  и параметра  $\mu$  (см. ответ к задаче **2.19, а)**).

**3.14–3.16.** См. пункт **В** азбуки.

**1.27.** Пусть  $a$  и  $b$  — длины катетов деревянного треугольника. Найдите отношение расстояний от его свободной вершины до сторон данного прямого угла.

**2.20.** Достаточно привести ответ и картинку.

**3.18.** Прочтите решение **3.17**.

### 5. Принцип касания (условный экстремум)

Задание состоит из задач на отыскание максимума и минимума. В каждой задаче дело можно свести к тому, чтобы на некоторой линии (как правило, это одно из множеств азбуки) найти точку, где достигается наибольшее или наименьшее значение некоторой функции. Прочтите решения задач **4.1, 4.2** и **4.7** (стр. 50–52), решение задачи **5.1** и остальной текст § 5, в особенности стр. 66–68, изучите (или перерисуйте) карты линий уровня на стр. 62–63.

**4.3; 4.9; 5.4, а); 5.5; 5.6, а), б); 5.8 || 4.8; 5.4, б); 5.7.**

Пояснение

**5.4, а).** См. задачу **1.16, а)**.

### 6. Разбиения

В этом задании встречаются различные множества точек, удовлетворяющих условиям типа неравенств, а также различные операции над множествами (пересечения, объединения), соответствующие логическим комбинациям условий. Многие пункты азбуки § 2 снабжены дополнениями такого типа. Линия, состоящая из точек  $M$ , где  $f(M) = a$ , разбивает плоскость на две области — в одной  $f(M) < a$ , а в другой  $f(M) > a$  (здесь  $f$  — некоторая функция на плоскости, см. стр. 60). Точно так же, если  $f$  и  $g$  — две функции на плоскости, то множество точек  $M$ , где  $f(M) = g(M)$ , разбивает плоскость на области; в одних областях  $f(M) > g(M)$ , а в других —  $f(M) < g(M)$ . Просмотрите текст § 3 (стр. 42–43), решение задач **3.11, 3.23** (про сыр).

**1.19; 3.12; 3.14; 5.3, а), б); 3.15; 3.16 || 3.18; 3.19; 4.11; 4.12, а), б).**

Пояснения

**1.19.** Нарисуйте отрезок  $BC$  и укажите множество точек вершин  $A$  треугольников  $ABC$ , для которых выполнено каждое из условий а), б), в); воспользуйтесь вторыми абзацами пунктов **Г** и **Д** азбуки.

**3.14.** Прочтите решение **3.13**.

**3.15–3.16.** Воспользуйтесь **В**, а в задаче **3.16** вспомните **2.4**.

**3.18.** Постройте для каждой стороны многоугольника множество **В**, соответствующее  $h = S/p$ . Могут ли эти множества покрыть весь наш многоугольник площади  $S$ ?

**4.11–4.12.** Прочтите решения **4.10**.

### 7. Эллипсы, гиперболы, параболы

Цель этого задания — знакомство с нашими первыми определениями перечисленных в названии кривых: пунктами азбуки **М, Н, П**. Просмотрите § 6 и составьте перечень азбуки: рядом с каждой из этих букв напишите формулу и нарисуйте соответствующую картинку (в этом вам помогут задачи **6.5, а), б)** этого задания).

**6.1, а), б, в); 6.2; 6.3, а), б), в), г); 6.4, а), б); 6.5, а), б); 6.10, а), б); 6.11, а), б) || 6.8; 6.12 а), б); 6.13, а); 6.14; 6.24.**

Пояснения

**6.1, а), б), в).** Укажите, как зависит ответ от параметра (положите  $|AB| = 2c$ ).

**6.2.** Используйте теорему об отрезках касательных к окружности.

**6.4, б).** Рассмотрите положения ломаной  $ABCD$  такие, что звено  $BC$  пересекает  $AD$ .

Следующие задачи относятся к фокальным свойствам кривых.

**6.10, а).** Доказательство проводится по схеме решения **6.9, а)** и при этом опирается на задачу **6.7**.

**6.11, а).** Задача состоит в том, чтобы сопоставить определение параболы (пункт **II** азбуки) и её фокальное свойство.

**6.8.** Доказательство аналогично доказательству ортогональности софокусных эллипсов и гипербол (стр. 75).

## 8. Огибающие. Бесконечные объединения

В этом задании все задачи достаточно сложны. В каждой рассматривается целое семейство прямых или окружностей. Если взять объединение линий этого семейства, получается целая область на плоскости. Часто бывает, что границей этой области оказывается огибающая этого семейства линий — кривая (или прямая), которая касается всех линий семейства. (Например, в решении задачи **1.5** на стр. 18 мы использовали тот факт, что огибающей семейства хорд равной длины данной окружности служит окружность, концентрическая данной.) Мы очень советуем к каждой задаче сделать картинку; при этом рисовать огибающие не нужно — если нарисовать достаточно много линий семейства, то огибающие возникнут сами (как на рисунках стр. 79).

Прочтите текст на стр. 78–80, стр. 11, решения **3.20, б)**, **6.6, 6.7** и доказательство фокального свойства параболы (стр. 75–76).

**1.30, а), б); 3.20, а); 3.22; 4.5; 6.16, а), б); 6.17 || 6.15, а); 6.25, а), б); 7.2; 7.20.**

Пояснения

**1.30.** Воспользуйтесь свойством касательных к окружности.

**3.20.** Представьте это объединение как множество вершин  $M$  шарнирного параллелограмма  $OPMQ$  со сторонами 3 см и 5 см; сравните этот приём с § 7 (стр. 90–98).

**3.22.** Если первые  $t$  минут человек шёл по дороге, а потом — по дугу, куда он мог прийти? Теперь надо взять объединение полученных множеств по всем  $t$  от 0 до 60.

**4.5.** Какое множество будет ответом в задаче **3.22**, если 1 час заменить на  $T$  часов? Выясните, при каком значении  $T$  это множество содержит точку  $B$ .

**7.20.** Семейство касательных к нефроиде изучалось в задаче **7.16**. Здесь также нужно вспомнить задачи про кардиоиду **7.1, а)**, **7.2** и теорему о двух кругах (стр. 99).

## 9. Касательные к циклоидам

Это задание включает ряд задач, в которых о некотором семействе прямых нужно доказать, что их огибающая — циклоидальная кривая. Решения большинства из них опираются на теорему о двух кругах. Прочтите формулировку и образцы применения этой теоремы на стр. 99–100, а также разберитесь в её доказательстве (стр. 101–105).

**7.17, а), б); 7.16; 7.18; 7.19 || 7.21; 7.22; 7.23.**

Пояснения

**7.17.** Выясните, по каким кривым двигаются концы диаметров, и какая кривая служит их огибающей. (Сравните результат с рисунком 7 на стр. 97.)

**7.16.** Используя теорему о двух кругах, опишите семейство касательных к нефроиде. Прочтите решение задачи **7.15**.

## 10. Уравнения кривых

Метод координат позволяет сформулировать общие теоремы, естественно обобщающие ряд частных геометрических наблюдений (просмотрите общие теоремы в § 2, стр. 29–30, 35–36, § 6, стр. 80–86). Представление кривых в виде уравнений даст возможность решать геометрические вопросы на алгебраическом языке. В этом задании собраны упражнения на метод координат и задачи, в которых естественно им пользоваться. Большинство задач относится к кривым второго порядка. В некоторых задачах нужно сделать переход от параметрических уравнений к алгебраическим (см. решение задачи **0.2**, стр. 8).

**1.16**, в); **6.18**; **6.19**, а), б), в); **6.20**, а), б); **7.24**, б) || **6.21**, а), б); **6.23**; **6.25**, а); **6.26**, а), б); **6.27**.

#### Пояснения

В задачах про расстояния до точек и прямых нужно внимательно проследить, как зависит ответ от параметра. Для каждой из этих задач нужно нарисовать соответствующую карту — семейство кривых. Рисовать эллипс по заданному уравнению удобно, представив его как сжатую окружность (стр. 82), а гиперболу — начертив её асимптоты и отметив её вершины (точки гиперболы, ближайшие к её центру).

В задаче **6.26**, если ограничиться точками  $M$  внутри треугольника, можно привести красивое геометрическое решение, использующее подобие треугольников, а также теоремы о вписанном угле и угле между касательной и хордой.

### 11. Геометрический практикум

Это задание состоит в изготовлении рисунков, иллюстрирующих наиболее интересные определения и свойства кривых. Оно позволит просмотреть книгу с новой точки зрения.

Можно рассматривать задачи в духе известного высказывания: «геометрия — это искусство правильно рассуждать на неправильном чертеже». Но иногда имеет смысл подходить к геометрии как к физике: точный чертёж — это геометрический эксперимент, он позволяет разобраться в трудном утверждении, относящемся к целому семейству линий или запутанной конфигурации, подметить какую-то новую закономерность.

В основном мы предлагаем повторить (иногда — в дополненном виде) те наши чертежи, которые изображают интересные семейства прямых и окружностей. Выполнение этих иллюстраций технически сравнительно несложно, но всё же, чтобы они получились красивыми, требуется аккуратность и известная изобретательность. На больших листах бумаги эти рисунки значительно более выразительны, чем наши мелкие чертежи на полях.

1. *Астроида* (стр. 11). Постарайтесь, чтобы середины отрезков были равномерно распределены по окружности, на которой они лежат. Чем больше будет нарисовано отрезков, тем лучше будет видна их огибающая — астроида.

2. *Ортогональные семейства окружностей* (стр. 64). Первое семейство — это всевозможные окружности, проходящие через точки  $A$  и  $B$  (см. **2.1**). Второе семейство — это окружности, центры которых лежат на прямой  $AB$ ; если  $M$  — центр одной из них, то её радиус — это отрезок касательной, проведённой из точки  $M$  к окружности с диаметром  $AB$ .

3. *Эллипсы, гиперболы и параболы* (стр. 73). Способ построения указан в задачах **6.5**, а), б). Раскрасьте получившиеся клетки двумя цветами в шахматном порядке (см. мелкий шрифт на стр. 75 и послесловие к задаче **6.8**). Сделайте ещё по одному экземпляру рисунков к задачам **6.5**, а), б) и проведите на них тушь семейства эллипсов, гипербол и парабол.

4. *Кривые второго порядка как огибающие прямых* (стр. 79, рисунки 4–6). Способ построения следует из **6.16** и **6.17**.

5. *Вращающиеся прямые*. Сделайте самостоятельно рисунок, иллюстрирующий пункт  $D^{\circ}$  азбуки (стр. 25). Начертите окружность, разбейте её на 12 равных частей.

Проведите через одну из точек деления  $A$  и остальные точки деления прямые, а также касательную к окружности в точке  $A$ : (получится пучок из 12 прямых, разделяющих плоскость на 24 равных по величине угла). Двигая карандаш по окружности, можно убедиться, что при переходе от точки  $M$  деления к следующей прямая  $AM$  поворачивается на один и тот же угол. Выберите ещё одну точку деления  $B$  (скажем, четвертую по счёту от  $A$ ) и постройте для неё такой же пучок из 12 прямых, как для точки  $A$ . Отметьте для каждой точки деления  $M$  острый угол между прямыми  $AM$  и  $BM$  (все эти углы одинаковы!).

Из теоремы  $D^\circ$  следует, что если продолжить все 23 построенные прямые до пересечения, то все 110 полученных точек пересечения (не считая точек  $A$  и  $B$ ) лежат на 11 окружностях — по 10 на каждой (?).

Раскрасьте клетки, полученной сетки в шахматном порядке. Тогда вы увидите семейство окружностей, проходящих через точки  $A$  и  $B$  и семейство гипербол (лучше взять пучки не из 12, а из 24 прямых). В самом деле, если прямые, проходящие через точки  $A$  и  $B$ , вращаются в разные стороны с одинаковой угловой скоростью, то их точка пересечения движется по гиперболе (6.23).

6. *Конхоида Никомеда и улитки Паскаля* (стр. 89 и 94–95). Конхоида Никомеда получается следующим образом. Дана прямая и точка. На прямые, проходящие через данную точку, откладываются от точек их пересечения с данной прямой отрезки постоянной длины  $d$  в ту и другую сторону. Нарисуйте семейство таких конхoid (с различными  $d$ ).

Улитки Паскаля получают так же. Дана окружность и точка на ней. На прямых, проходящих через данную точку, откладываются от точек их пересечения с окружностью отрезки постоянной длины в ту и другую сторону.

7. *Кардиоида и нефроида как огибающие окружностей* (стр. 91, 7.2 и стр. 105, 7.20).

8. *Кардиоида и нефроида как огибающие отражённых лучей* (стр. 101). Эти рисунки удобно строить, пользуясь тем фактом, что хорда падающего луча равна по длине хорде отражённого луча.

9. *Пешеходы на прямых и на окружности*. Повторите рисунок 3 на стр. 79. Сделайте рисунки циклоидальных кривых (3–6 на стр. 96–97), воспользовавшись задачей 7.19, для  $k = -3, -2, 2, 3$ .

Поясним это для случая  $k = -2$ . Разобьём окружность, скажем, на 24 равные части. Пусть точка  $A$  деления — начальное положение пешеходов  $P$  и  $Q$  и каждый из них равномерно движется по окружности. Поскольку  $k = -2$ , то они идут в разные стороны и скорость  $Q$  в два раза больше скорости  $P$ . Отмечаем их положения через равные промежутки времени (когда точка  $P$  проходит очередную точку деления) и соединяем их прямыми  $PQ$  (когда пешеходы попадают в одну точку деления, проводим касательную к окружности). Огибающей этих прямых является кривая Штейнера.

## 12. Небольшие исследования

Почти каждая задача по геометрии — это предмет для небольшого самостоятельного исследования, требующего сообразительности, нестандартного хода мысли. В этом задании мы выделили четыре трудные задачи, для решения которых нужно использовать целый комплекс различных соображений.

4.12, а), б); 4.14, а), б); 6.15, а), б); 7.23, а), б), в).

Задача 4.14, б) очень близка по решению к задаче про катер. К двум последним задачам 6.15 и 7.23 имеются указания в конце книги, к последней задаче можно сделать красивые рисунки, изобразив семейство прямых Симсона некоторого треугольника (огибающая — кривая Штейнера).

## Оглавление

Предисловие ко второму изданию . . . . .	3
Несколько слов о Н. Б. Васильеве ( <i>Ж. М. Работ</i> ) . . . . .	4
Введение . . . . .	7
§ 1. Множество точек . . . . .	12
§ 2. Азбука . . . . .	23
§ 3. Логические комбинации . . . . .	38
§ 4. Минимум и максимум . . . . .	50
§ 5. Линии уровня . . . . .	58
§ 6. Кривые второго порядка . . . . .	70
§ 7. Вращения и траектории . . . . .	90
Ответы, указания, решения . . . . .	110
Приложение I. Метод координат (основные формулы) . . . .	115
Приложение II. Некоторые факты школьной планиметрии . .	116
Приложение III. Дюжина заданий . . . . .	118

*Николай Борисович Васильев,  
Виктор Львович Гутенмахер*

ПРЯМЫЕ И КРИВЫЕ

6-е изд., стереотипное — М.: МЦНМО, 2006. — 128 с.: ил.

---

Техн. редакторы *Д. Н. Вельтищев, М. Н. Вельтищев.*  
Замечания об ошибках и опечатках направляйте на [dmvn@mcsme.ru](mailto:dmvn@mcsme.ru).

---

Изд. лицензия ИД №01335 от 24/III 2000 г.  
Подписано к печати 21/VII 2006 г.  
Формат 60 × 88 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Офсетная печать.  
Объем 8,00 физ. печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ .

---

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., д. 11.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести  
в магазине «Математическая книга».  
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., д. 11.  
Тел. для справок (495) 241-72-85.  
Адрес в Internet: <http://biblio.mcsme.ru>.  
E-mail: [biblio@mcsme.ru](mailto:biblio@mcsme.ru).

---

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНТИ».  
140010, г. Люберцы Московской обл.,  
Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554-21-86.

---

---

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

---

---

- |           |   |
|-----------|---|
| <b>1</b>  | <i>В. М. Тихомиров</i><br>Великие математики прошлого<br>и их великие теоремы   |
| <b>2</b>  | <i>А. А. Болибрух</i><br>Проблемы Гильберта (100 лет спустя)  |
| <b>3</b>  | <i>Д. В. Аносов</i><br>Взгляд на математику и нечто из неё  |
| <b>4</b>  | <i>В. В. Прасолов</i><br>Точки Брокара и изогональное сопряжение  |
| <b>5</b>  | <i>Н. П. Долбилли</i><br>Жемчужины теории многогранников  |
| <b>6</b>  | <i>А. Б. Сосинский</i><br>Мыльные плёнки и случайные блуждания  |
| <b>7</b>  | <i>И. М. Парамонова</i><br>Симметрия в математике   |
| <b>8</b>  | <i>В. В. Острик, М. А. Цфасман</i><br>Алгебраическая геометрия и теория чисел:<br>рациональные и эллиптические кривые |
| <b>9</b>  | <i>Б. П. Гейдман</i><br>Площади многоугольников   |
| <b>10</b> | <i>А. Б. Сосинский</i><br>Узлы и косы   |
| <b>11</b> | <i>Э. Б. Винберг</i><br>Симметрия многочленов   |
| <b>12</b> | <i>В. Г. Сурдин</i><br>Динамика звёздных систем   |

<b>13</b>	<i>В. О. Бугаенко</i> Уравнения Пелля
<b>14</b>	<i>В. И. Арнольд</i> Цепные дроби
<b>15</b>	<i>В. М. Тихомиров</i> Дифференциальное исчисление (теория и приложения)
<b>16</b>	<i>В. А. Скворцов</i> Примеры метрических пространств
<b>17</b>	<i>В. Г. Сурдин</i> Пятая сила
<b>18</b>	<i>А. В. Жуков</i> О числе $\pi$
<b>19</b>	<i>А. Г. Мякишев</i> Элементы геометрии треугольника
<b>20</b>	<i>И. В. Яценко</i> Парадоксы теории множеств
<b>21</b>	<i>И. Х. Сабитов</i> Объёмы многогранников
<b>22</b>	<i>А. Л. Семёнов</i> Математика текстов
<b>23</b>	<i>М. А. Шубин</i> Математический анализ для решения физических задач
<b>24</b>	<i>А. И. Дьяченко</i> Магнитные полюса Земли
<b>25</b>	<i>С. М. Гусейн-Заде</i> Разборчивая невеста

---

---

**26**

*К. П. Козась*  
Ладейные числа и многочлены

---

---

**27**

*С. Г. Смирнов*  
Прогулки по замкнутым поверхностям

---

---

**28**

*А. М. Райгородский*  
Хроматические числа

---

---

**29**

*С. Б. Гашков*  
Системы счисления и их применение

---

---

**30**

*Ю. П. Соловьёв*  
Неравенства

---

---

**31**

*В. Ю. Протасов*  
Максимумы и минимумы в геометрии

---

---

**32**

*А. В. Хачатурян*  
Геометрия Галилея

---

---

**33**

*А. М. Райгородский*  
Проблема Борсука

---

---

---

---

**ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ**

---

---

*А. А. Заславский, Г. Р. Челноков*  
Теорема Понселе  
и близкие геометрические задачи

---

---